Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Latina* - 11/7/2006)

(ogni esercizio, risolto correttamente, vale 6 punti)

1. Tre studenti, S_1, S_2, S_3, sostengono una prova d'esame con probabilità di essere promossi, rispettivamente, $\frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$. Assumendo che gli eventi $E_i =$ "*S_i supera l'esame*", $i = 1, 2, 3$, siano stocasticamente indipendenti, calcolare la probabilità p che esattamente due dei tre studenti abbiano superato l'esame, supposto che almeno uno sia stato promosso.

   $$p =$$

2. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione caratteristica $\varphi(t)$ del numero aleatorio $X = |E_1| + |E_2|$.

   $$\varphi(t) =$$

3. Da un'urna contenente 1 pallina bianca e 2 nere si effettuano 2 estrazioni senza restituzione. Definiti gli eventi $A =$ "*la pallina bianca esce nella* 1^a *estrazione*", $B =$ "*la pallina bianca esce nella* 2^a *estrazione*", determinare la funzione di ripartizione del numero aleatorio $X = |A| + 2|B|$.

   $$F(x) = \begin{cases} \quad , \\ \quad , \\ \quad , \\ \quad , \end{cases}$$

4. Dati due numeri aleatori continui X ed Y, stocasticamente indipendenti e con distribuzione uniforme, rispettivamente, negli intervalli $[1, 4]$ e $[0, 2]$, calcolare la probabilità p dell'evento $(X + Y > 3)$.

   $$p =$$

5. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$, per ogni (x, y). Calcolare la covarianza dei numeri aleatori $U = X + Y, V = X - Y$.

   $$Cov(U, V) =$$

6. La funzione di rischio di un numero aleatorio continuo X non negativo è $h(x) = x + 1$, per $x \geq 0$, con $h(x) = 0$ altrove. Determinare la previsione di X.

   $$\mathbb{P}(X) =$$

7. Da un'urna contenente 2 palline bianche e 3 nere si tolgono a caso 3 palline senza osservarle; successivamente, dall'urna si effettuano tre estrazioni con restituzione. Calcolare la probabilità che nella terza estrazione esca pallina bianca, supposto di aver ottenuto pallina bianca nelle prime due estrazioni.
   (*utilizzare gli eventi* $H_r =$ "*le palline bianche rimaste nell'urna sono* r", $r = 0, 1, 2$; $E_i =$ "*l'i-ma pallina estratta è bianca*", $i = 1, 2, 3$)

   $$P(E_3 \mid E_1 E_2) =$$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 11/7/2006.

1. Osservando che
$$P(E_1 \vee E_2 \vee E_3) = 1 - P(E_1^c E_2^c E_3^c) = 1 - P(E_1^c)P(E_2^c)P(E_3^c) = 1 - \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5} = \frac{49}{50}\,,$$
segue
$$p = P(E_1E_2E_3^c \vee E_1E_2^cE_3 \vee E_1^cE_2E_3 \,|\, E_1 \vee E_2 \vee E_3) = \frac{P(E_1E_2E_3^c) + P(E_1E_2^cE_3) + P(E_1^cE_2E_3)}{P(E_1 \vee E_2 \vee E_3)} =$$
$$= \frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5} + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}}{\frac{49}{50}} = \frac{45}{98}\,.$$

2. Si ha $X \in \{0,1,2\}$, con
$$P(X=0) = p_0 = P(E_1^cE_2^c) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{10}\,,$$
$$P(X=1) = p_1 = P(E_1E_2^c) + P(E_1^cE_2) = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} = \frac{9}{20}\,,$$
$$P(X=2) = p_2 = P(E_1E_2) = \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{4} = \frac{9}{20}\,.$$
Pertanto
$$\varphi(t) = \sum_{h=0}^{2} p_h\, e^{itx_h} = \frac{2 + 9e^{it} + 9e^{2it}}{20}\,.$$

3. Essendo $AB = \emptyset$, i costituenti sono $C_1 = AB^c = A$, $C_2 = A^cB = B$, $C_3 = A^cB^c$, ai quali corrispondono per X rispettivamente i valori: 1, 2, 0. Inoltre
$$P(C_1) = \frac{1}{3}\,,\ P(C_2) = P(A^cB) = P(A^c)P(B|A^c) = \cdots = \frac{1}{3}\,,\ P(C_3) = P(A^c)P(B^c|A^c) = \cdots = \frac{1}{3}\,.$$
Pertanto: $P(X=0) = P(X=1) = P(X=2) = \frac{1}{3}$. Allora
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{3}, & 0 \le x < 1 \\ \frac{2}{3}, & 1 \le x < 2 \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$$

4. Si ha $f_1(x) = \frac{1}{3}$, per $x \in [1,4]$, con $f_1(x) = 0$ altrove; $f_2(y) = \frac{1}{2}$, per $y \in [0,2]$, con $f_2(y) = 0$ altrove. Pertanto: $f(x,y) = \frac{1}{6}$, per $(x,y) \in [1,4] \times [0,2]$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Allora
$$p = P(X+Y > 3) = 1-P(X+Y \leq 3) = 1-\int_1^3 dx \int_0^{3-x} f(x,y)\,dy = 1-\int_1^3 dx \int_0^{3-x} \frac{1}{6}\,dy = \cdots = \frac{2}{3}\,.$$

5. Si ha
$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dy = \cdots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,, \quad \forall\, x\,,$$
$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx = \cdots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\,, \quad \forall\, y\,,$$
con $f(x,y) = f_1(x) f_2(y)$ per ogni (x,y). Pertanto X ed Y sono stocasticamente indipendenti e con distribuzione normale standard. Allora
$$\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(Y) = \mathbb{P}(X+Y) = \mathbb{P}(X-Y) = 0\,, \qquad \mathbb{P}(X^2) = \mathbb{P}(Y^2) = 1\,,$$
e quindi
$$Cov(U,V) = Cov(X+Y, X-Y) = \mathbb{P}[(X+Y)(X-Y)] - \mathbb{P}(X+Y)\mathbb{P}(X-Y) =$$
$$= \mathbb{P}(X^2 - Y^2) = \mathbb{P}(X^2) - \mathbb{P}(Y^2) = 0\,.$$

6. Si ha
$$S(x) = e^{-\int_0^x h(t)dt} = e^{-\frac{x^2}{2} - x}\,, \quad x \geq 0\,,$$
e quindi, per $x \geq 0$ si ha $f(x) = h(x)S(x) = (x+1)\,e^{-\frac{x^2}{2}-x}$, con $f(x) = 0$ altrove. Allora
$$\mathbb{P}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} x(x+1) e^{-\frac{x^2}{2}-x} dx = \left[-x e^{-\frac{x^2}{2}-x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}-x} dx =$$
$$= \sqrt{2\pi e} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+1)^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi e} \int_0^{+\infty} N_{-1,1}(x) dx =$$
$$= \sqrt{2\pi e}\,[1 - \Phi_{-1,1}(0)] = \sqrt{2\pi e}\,[1 - \Phi(1)] \simeq \sqrt{2\pi e}(1 - 0.8413) = 0.1587\sqrt{2\pi e}\,.$$

7. Si ha
$$P(H_0) = \frac{\binom{2}{2}\binom{3}{1}}{\binom{5}{3}} = \frac{3}{10}\,, \quad P(H_1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{2}}{\binom{5}{3}} = \frac{3}{5}\,, \quad P(H_2) = \frac{\binom{2}{0}\binom{3}{3}}{\binom{5}{3}} = \frac{1}{10}\,;$$
$$P(E_1E_2 \,|\, H_0) = 0\,, \quad P(E_1E_2 \,|\, H_1) = \frac{1}{4}\,, \quad P(E_1E_2 \,|\, H_2) = 1\,;$$
$$P(E_1E_2E_3 \,|\, H_0) = 0\,, \quad P(E_1E_2E_3 \,|\, H_1) = \frac{1}{8}\,, \quad P(E_1E_2E_3 \,|\, H_2) = 1\,.$$
Allora
$$P(E_1E_2) = \sum_r P(E_1E_2|H_r)P(H_r) = \cdots = \frac{1}{4}\,;$$
$$P(E_1E_2E_3) = \sum_r P(E_1E_2E_3|H_r)P(H_r) = \cdots = \frac{7}{40}\,;$$
pertanto $P(E_3 \,|\, E_1E_2) = \frac{P(E_1E_2E_3)}{P(E_1E_2)} = \frac{7}{10}$.