Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Latina* - 14/12/2006)

(ogni esercizio, risolto correttamente, vale 6 punti)

1. Tre studenti, S_1, S_2, S_3, sostengono un esame molto selettivo. Definiti gli eventi $E_i =$ "*S_i supera l'esame*", $i = 1, 2, 3$, si assuma $P(E_i) = \frac{1}{2}$, $\forall\, i$; $P(E_iE_j) = \frac{1}{5}$; $\forall\, i \neq j$, $P(E_1E_2E_3) = \frac{1}{20}$. Calcolare la probabilità p che almeno uno studente superi l'esame, supposto che almeno uno non lo superi.

   $p =$

2. Dati tre eventi scambiabili A_1, A_2, A_3, con $P(A_1) = \frac{1}{2}$, $P(A_1A_2) = \frac{1}{6}$, $P(A_1A_2A_3) = 0$, calcolare le probabilità degli eventi $A_1A_2^c$, $A_2^cA_3^c$, $A_1A_2A_3^c$ e $A_1^cA_2^cA_3^c$.
   (*ricordiamo che, per ogni E ed H, si ha $E = EH \vee EH^c$ e quindi* ......)

   $P(A_1A_2^c) =$ $\quad$ $P(A_2^cA_3^c) =$ $\quad$ $P(A_1A_2A_3^c) =$ $\quad$ $P(A_1^cA_2^cA_3^c) =$

3. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione di ripartizione $F(x)$ del numero aleatorio $X = |A_1| + |A_2| + |A_3|$.

   $$F(x) = \begin{cases} & , \\ & , \\ & , \end{cases}$$

4. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è $f(x, y) = \frac{1}{\pi}e^{-x^2-y^2}$, per ogni punto (x, y) del piano $\mathbb{R}^2$. Calcolare la previsione e la varianza di $X + Y$.

   $\mathbb{P}(X + Y) =$ $\quad$ $Var(X + Y) =$

5. Con riferimento all'esercizio precedente, utilizzando la funzione caratteristica, determinare la distribuzione di probabilità del numero aleatorio $Z = X - Y$.

   $Z \sim$

6. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è $f(x, y) = ke^{-(x+2y)}$, per $x \geq 0\,,\ y \geq \frac{x}{2}$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante k e la funzione di rischio del numero aleatorio X.

   $k =$ $\quad$ $h_1(x) =$

7. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la previsione di Y e stabilire se X e Y sono stocasticamente indipendenti.

   $\mathbb{P}(Y) =$ $\quad$ X, Y *stoc. indip.*?

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 14/12/2006.

1. Osservando che
$$P(E_1^c \vee E_2^c \vee E_3^c) = 1 - P(E_1E_2E_3) = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}\,,$$
$$P(E_1 \vee E_2 \vee E_3) = P(E_1)+P(E_2)+P(E_3)-P(E_1E_2)-P(E_1E_3)-P(E_2E_3)+P(E_1E_2E_3) =$$
$$= 3\cdot\frac{1}{2} - 3\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{20} = \frac{19}{20} = 1 - P(E_1^cE_2^cE_3^c)\,,$$
segue
$$p = P(E_1 \vee E_2 \vee E_3 \,|\, E_1^c \vee E_2^c \vee E_3^c) = \frac{P[(E_1 \vee E_2 \vee E_3) \wedge (E_1^c \vee E_2^c \vee E_3^c)]}{P(E_1^c \vee E_2^c \vee E_3^c)} =$$
$$= \frac{P[(E_1^cE_2^cE_3^c \vee E_1E_2E_3)^c]}{P(E_1^c \vee E_2^c \vee E_3^c)} = \frac{1 - P(E_1^cE_2^cE_3^c) - P(E_1E_2E_3)}{1 - P(E_1E_2E_3)} = \frac{\frac{19}{20} - \frac{1}{20}}{1 - \frac{1}{20}} = \frac{18}{19}\,.$$

2. Si ha
$$P(A_1A_2^c) = P(A_1) - P(A_1A_2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\,, \quad P(A_2^cA_3^c) = P(A_2^c) - P(A_2^cA_3) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\,,$$
$$P(A_1A_2A_3^c) = P(A_1A_2) - P(A_1A_2A_3) = P(A_1A_2) = \frac{1}{6}\,.$$
Inoltre, osservando che
$$P(A_1A_2^cA_3^c) = P(A_1A_3^c) - P(A_1A_2A_3^c) = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}\,,$$
segue
$$P(A_1^cA_2^cA_3^c) = P(A_2^cA_3^c) - P(A_1A_2^cA_3^c) = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0.$$

3. Si ha
$$P(X=0) = P(A_1^cA_2^cA_3^c) = 0\,, \quad P(X=3) = P(A_1A_2A_3) = 0\,,$$
$$P(X=1) = P(A_1A_2^cA_3^c) + P(A_1^cA_2A_3^c) + P(A_1^cA_2^cA_3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}\,,$$
$$P(X=2) = P(A_1A_2A_3^c) + P(A_1A_2^cA_3) + P(A_1^cA_2A_3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}\,.$$
Pertanto
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \frac{1}{2}, & 1 \le x < 2, \\ 1, & x \ge 2. \end{cases}$$

4. Il vettore aleatorio (X, Y) ha una distribuzione normale bidimensionale di parametri

$$m_1 = m_2 = 0\,, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,, \quad \rho = 0\,.$$

Pertanto

$$\mathbb{P}(X+Y) = m_1 + m_2 = 0\,, \qquad Var(X+Y) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\,.$$

5. Si ha

$$f_1(x) = N_{0,\frac{1}{\sqrt{2}}}(x)\,, \;\; x \in \mathbb{R}\,; \qquad f_2(y) = N_{0,\frac{1}{\sqrt{2}}}(y)\,, \;\; y \in \mathbb{R}\,;$$

ed essendo $\rho = 0$ segue che X e Y sono stocasticamente indipendenti. Inoltre, il numero aleatorio $-Y$ ha una distribuzione normale con parametri $m = m_2 = 0, \sigma = \sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Infine, dall'indipendenza di X, Y segue anche l'indipendenza di $X, -Y$. Allora

$$\varphi_Z(t) = \varphi_{X-Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_{-Y}(t) = e^{im_1 t - \frac{\sigma_1^2 t^2}{2}} e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}} = e^{i(m_1+m)t - \frac{(\sigma_1^2+\sigma^2)t^2}{2}} = e^{-\frac{t^2}{2}}\,;$$

pertanto Z ha una distribuzione normale standard.

6. Dev'essere $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$, ovvero

$$\int_0^{+\infty} dx \int_{\frac{x}{2}}^{+\infty} ke^{-(x+2y)}dy = \cdots = \frac{k}{4} = 1\,;$$

pertanto: $k = 4$. Inoltre, per $x \geq 0$, si ha

$$f_1(x) = \int_{\frac{x}{2}}^{+\infty} 4e^{-(x+2y)}dy = 2e^{-2x}\,,$$

con $f_1(x) = 0$ altrove; quindi X ha una distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 2$. Allora

$$h_1(x) = \frac{f_1(x)}{S_1(x)} = \frac{2e^{-2x}}{\int_x^{+\infty} 2e^{-2t}dt} = \frac{2e^{-2x}}{e^{-2x}} = 2\,, \quad x \geq 0\,,$$

con $h_1(x) = 0$ altrove.

7. Si ha

$$f_2(y) = \int_0^{2y} 4e^{-(x+2y)}dx = \cdots = 4e^{-2y}(1 - e^{-2y})\,, \;\; y \geq 0\,,$$

con $f_2(y) = 0$ altrove. Pertanto

$$\mathbb{P}(Y) = \int_0^{+\infty} yf_2(y)dy = 2\int_0^{+\infty} y \cdot 2e^{-2y}dy - \int_0^{+\infty} y \cdot 4e^{-4y}dy = 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}\,.$$

Infine, essendo in generale $f(x,y) \neq f_1(x)f_2(y)$, i numeri aleatori X e Y non sono stocasticamente indipendenti.