Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Latina* - 18/2/2006)

(ogni esercizio, risolto correttamente, vale 6 punti)

1. Da un lotto contenente 5 pezzi, di cui 2 difettosi, si prelevano a caso 3 pezzi. Sia H_r l'evento *"fra i 3 pezzi prelevati dal lotto ce ne sono r difettosi"*, $r = 0, 1, 2$. Calcolare $p = P(H_2)$. Successivamente, viene esaminato a caso uno dei 3 pezzi prelevati dal lotto. Sia E l'evento *"il pezzo esaminato risulta difettoso"*. Calcolare $\gamma = P(H_2|E)$.

   $p =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\gamma =$

2. Con riferimento all'esercizio precedente, si supponga che i 3 pezzi siano prelevati uno per volta senza restituzione, ponendo $E_i =$ *"l'i-mo pezzo prelevato è difettoso"*, $i = 1, 2, 3$. Stabilire se E_1, E_2, E_3 sono scambiabili.

   E_1, E_2, E_3 *scambiabili?*

3. Sia data una costante $a \in (0, 1)$. Stabilire per quale valore di a la funzione $f(x) = \frac{x}{3}$, per $x \in [0, 3a]$, $f(x) = a$, per $x \in (3a, 3]$, con $f(x) = 0$ altrove, è una densità di probabilità. Calcolare inoltre la probabilità α dell'evento $(X > 3 - \sqrt{3})$.

   $a =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\alpha =$

4. Con riferimento all'esercizio precedente e utilizzando il valore trovato per a, dato un numero aleatorio X con densità $f(x)$, determinare la funzione di ripartizione di X.

$$F(x) = \begin{cases} \qquad\qquad , \\ \qquad\qquad , \\ \qquad\qquad , \\ \qquad\qquad , \end{cases}$$

5. Siano X e Y due numeri aleatori continui, con coefficiente di correlazione $\rho = -\frac{1}{2}$ e con densità di probabilità $f_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}$, $x \in I\!R$; $\quad f_2(y) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-5)^2}{18}}$, $y \in I\!R$. Calcolare la varianza di $X - Y$ e l'equazione della retta di regressione di Y su X.

   $Var(X - Y) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $y =$

6. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione caratteristica $\varphi_Z(t)$ del numero aleatorio $Z = \frac{X-1}{2}$. (*Ricordiamo che per una distribuzione normale, con parametri m, σ, risulta $\varphi(t) = e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$*).

   $\varphi_Z(t) =$

7. La distribuzione iniziale di un numero aleatorio Θ è normale con parametri $m_0 = 3$, $\sigma_0 = 2$. Le componenti di un campione casuale (X_1, X_2, X_3), subordinatamente ad ogni fissato valore θ di Θ, hanno una distribuzione normale con valor medio θ e scarto standard $\sigma = 1$. Supposto di aver osservato un campione casuale $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, con $x_1 + x_2 + x_3 = 9$, stabilire per quale valore θ_0 risulta $P(\Theta > \theta_0 \mid \mathbf{x}) = \Phi(2)$.

   $\theta_0 =$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 18/2/2006.

1. Si ha

$$P(H_0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{3}{3}}{\binom{5}{3}} = \frac{1}{10}\,, \quad P(H_1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{2}}{\binom{5}{3}} = \frac{6}{10}\,, \quad P(H_2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{3}{1}}{\binom{5}{3}} = \frac{3}{10}\,.$$

Pertanto $p = P(H_2) = \frac{3}{10}$. Inoltre

$$\gamma = P(H_2|E) = \frac{P(E|H_2)P(H_2)}{P(E|H_0)P(H_0)+P(E|H_1)P(H_1)+P(E|H_2)P(H_2)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{10}}{0\cdot\frac{1}{10}+\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{10}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{10}} = \frac{1}{2}\,.$$

2. Si ha $P(E_1) = \frac{2}{5}\,,\ P(E_1E_2) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{10}$. Inoltre, si può verificare che

$$P(E_2) = P(E_3) = P(E_1)\,, \quad P(E_2E_3) = P(E_1E_3) = P(E_1E_2)\,.$$

Pertanto E_1, E_2, E_3 sono scambiabili.

3. Dev'essere $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$; ovvero

$$\int_0^{3a} \frac{x}{3}\,dx + \int_{3a}^{3} a\,dx = \cdots = \frac{3a^2}{2} + a(3-3a) = 1\,.$$

Allora, ricordando che $0 < a < 1$, segue: $a = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$. Infine, osservando che $3a = 3-\sqrt{3}$ e che $f(x) = a$, per $x \in (3a, 3]$, si ha

$$\alpha = P(X > 3-\sqrt{3}) = P(X > 3a) = \int_{3a}^{3} a\,dx = a(3-3a) = \cdots = \sqrt{3}-1\,.$$

4. Per $x \leq 0$ si ha $F(x) = 0$; per $x \in (0, 3-\sqrt{3}]$ si ha

$$F(x) = \int_0^x \frac{t}{3}\,dt = \frac{x^2}{6}\,;$$

per $x \in (3-\sqrt{3}, 3)$ si ha

$$F(x) = \int_0^{3-\sqrt{3}} \frac{t}{3}\,dt + \int_{3-\sqrt{3}}^{x} \frac{3-\sqrt{3}}{3}\,dt = \cdots = \frac{3-\sqrt{3}}{3}x - 2 + \sqrt{3}\,;$$

per $x \geq 3$ si ha $F(x) = 1$.

5. X e Y hanno distribuzione normale con parametri $m_1 = 1\,,\ \sigma_1 = 2\,,\ m_2 = 5\,,\ \sigma_2 = 3$. Pertanto

$$Var(X - Y) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 = 4 + 9 - 2 \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot 2 \cdot 3 = 19\,.$$

Inoltre

$$y = m_2 + \rho \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - m_1) = -\frac{3}{4}\,x + \frac{23}{4}\,.$$

6. Essendo Z una funzione lineare di X, la sua distribuzione è ancora normale con parametri

$$m_Z = I\!\!P(\frac{X-1}{2}) = 0\,, \quad \sigma_Z = \frac{1}{2}\sigma_X = 1\,;$$

ovvero Z ha una distribuzione normale standard. Pertanto: $\varphi_Z(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

7. Si ha $\Theta \mid \mathbf{x} \sim N_{m_3,\sigma_3}$, con $m_3 = m_0 = 3$ in quanto $\overline{x} = m_0 = 3$. Inoltre

$$\frac{1}{\sigma_3^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{3}{\sigma^2} = \frac{1}{4} + 3 = \frac{13}{4}\,,$$

e quindi $\sigma_3 = \frac{2}{\sqrt{13}}$; pertanto $\Theta \mid \mathbf{x} \sim N_{3,\frac{2}{\sqrt{13}}}$. Allora

$$P(\Theta > \theta_0 \mid \mathbf{x}) = 1 - \Phi_{3,\frac{2}{\sqrt{13}}}(\theta_0) = 1 - \Phi\left(\frac{\theta_0 - 3}{\frac{2}{\sqrt{13}}}\right) = \Phi\left(-\frac{\theta_0 - 3}{\frac{2}{\sqrt{13}}}\right) = \Phi(2)\,,$$

da cui segue: $\theta_0 = m_3 - 2\sigma_3 = 3 - \frac{4}{\sqrt{13}}$.