Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Latina* - 18/9/2006)

(ogni esercizio, risolto correttamente, vale 6 punti)

1. Dati tre eventi scambiabili A, B, C, con $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(AB) = \frac{1}{5}$, $P(ABC) = \frac{1}{20}$, calcolare la probabilità p dell'evento condizionato $(AB \,|\, ABC \vee A^c B^c C^c)$.

$$p =$$

2. Dato un numero aleatorio discreto $X \in \{x_1, x_2, x_3\}$, con $x_1 < x_2 < x_3$ e con $P(X = x_1) = P(X = x_3) = p \in (0, 1)$, determinare la funzione di ripartizione $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} \quad & , \\ \quad & , \\ \quad & , \\ \quad & , \end{cases}$$

3. Con riferimento all'esercizio precedente, sia $Z = X + Y$, dove Y è un numero aleatorio con la stessa distribuzione di probabilità di X. Assumendo X e Y stocasticamente indipendenti e $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$, calcolare la funzione caratteristica del n.a. Z.

$$\varphi_Z(t) =$$

4. La densità di probabilità di un numero aleatorio continuo X è $f(x) = \frac{1}{5}$ per $x \in [1, 2]$, $f(x) = \frac{2}{5}$ per $x \in (2, 4]$, con $f(x) = 0$ altrove. Calcolare la funzione di sopravvivenza $S(x)$.

$$S(x) = \begin{cases} \quad & , \\ \quad & , \\ \quad & , \\ \quad & , \end{cases}$$

5. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x-1)^2 + (y+1)^2}{2}}$, per ogni (x, y). Calcolare la varianza del numero aleatorio $Z = \frac{X+Y}{2}$.

$$Var(Z) =$$

6. Dato un vettore aleatorio continuo (X, Y) con distribuzione uniforme sul trapezio T di vertici i punti $(0, 0), (4, 0), (4, 2), (0, 1)$, calcolare la probabilità α dell'evento $(Y > X - 2)$.

$$\alpha =$$

7. Un sistema è costituito da tre dispositivi in serie A, B e C, di durata aleatoria fino al guasto rispettivamente X, Y e Z. Assumendo i numeri aleatori X, Y e Z stocasticamente indipendenti e con distribuzione esponenziale di parametri $\lambda_X = 1, \lambda_Y = 2, \lambda_Z = 3$, calcolare, per ogni $t \geq 0$, la funzione di rischio $h(t)$ del tempo aleatorio T fino al guasto del sistema.

$$h(t) =$$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 18/9/2006.

1. Si ha

$$p = P(AB \,|\, ABC \vee A^cB^cC^c) = P(ABC \vee ABC^c \,|\, ABC \vee A^cB^cC^c) =$$

$$= P(ABC \,|\, ABC \vee A^cB^cC^c) = \frac{P(ABC)}{P(ABC \vee A^cB^cC^c)} = \frac{P(ABC)}{P(ABC) + P(A^cB^cC^c)},$$

con $P(A^cB^cC^c) = 1 - P(A \vee B \vee C)$ e con

$$P(A \vee B \vee C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) =$$

$$= 3P(A) - 3P(AB) + P(ABC) = \frac{3}{2} - \frac{3}{5} + \frac{1}{20} = \frac{19}{20}.$$

Pertanto: $p = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{20}+\frac{1}{20}} = \frac{1}{2}\cdot$

2. Si ha $P(X = x_2) = 1 - 2p$; pertanto, posto $P(X = x_i) = p_i,\ i = 1, 2, 3,$ segue

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < x_1 \\ p_1, & x_1 \leq x < x_2 \\ p_1 + p_2, & x_2 \leq x < x_3 \\ p_1 + p_2 + p_3, & x \geq x_3 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < x_1 \\ p, & x_1 \leq x < x_2 \\ 1 - p, & x_2 \leq x < x_3 \\ 1, & x \geq x_3 \end{cases}$$

3. Si ha

$$\varphi_X(t) = \varphi_Y(t) = \sum_h p_h\, e^{itx_h} = p\, e^{-it} + (1 - 2p) + p\, e^{it};$$

pertanto

$$\varphi_Z(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = [p\, e^{-it} + (1 - 2p) + p\, e^{it}]^2;$$

4. Ricordando che $S(x) = P(X > x)$, si ha $S(x) = 1$ per $x < 1$, $S(x) = 0$ per $x > 4$; inoltre, per $x \in [1, 2]$ si ha

$$S(x) = 1 - \int_1^x \frac{1}{5}\, dt = \frac{6 - x}{5};$$

infine, per $x \in (2, 4]$ si ha

$$S(x) = \int_x^4 \frac{2}{5}\, dt = \frac{8 - 2x}{5}.$$

5. Si ha
$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x-1)^2+(y+1)^2}{2}}\, dy = \cdots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}\,, \quad \forall\, x\,,$$
$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x-1)^2+(y+1)^2}{2}}\, dx = \cdots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y+1)^2}{2}}\,, \quad \forall\, y\,,$$
con $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ per ogni (x,y). Pertanto X ed Y sono stocasticamente indipendenti e con distribuzione normale di parametri $m_1 = 1, m_2 = -1, \sigma_1 = \sigma_2 = 1$. Allora
$$Var(Z) = \frac{1}{4} \cdot Var(X+Y) = \frac{1}{4}[Var(X) + Var(Y)] = \frac{1}{2}\,.$$

6. L'area del trapezio è 6, pertanto
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & (x,y) \in T \\ 0, & (x,y) \notin T \end{cases}$$
Allora
$$\alpha = 1 - P(Y \leq X - 2) = 1 - \int_2^4 dx \int_0^{x-2} \frac{1}{6}\, dy = \cdots = \frac{2}{3}\,.$$

7. Indicando con $S(t)$ la funzione di sopravvivenza e con $f(t)$ la densità di probabilità di T, si ha $h(t) = \frac{f(t)}{S(t)}$, con
$$S(t) = P(T > t) = P(X > t, Y > t, Z > t) = P(X > t)P(Y > t)P(Z > t) = e^{-t}e^{-2t}e^{-3t} = e^{-6t}\,.$$
Pertanto: $f(t) = -S'(t) = 6e^{-6t}\,,\ t \geq 0$ (distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 6$). Allora
$$h(t) = \frac{6e^{-6t}}{e^{-6t}} = 6\,,\ t \geq 0\,.$$