Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Latina* - 20/6/2006)

(ogni esercizio, risolto correttamente, vale 6 punti)

1. Un lotto contenente 7 pezzi (2 difettosi e 5 buoni) viene diviso a caso in due lotti L_1 ed L_2, contenenti rispettivamente 3 pezzi e 4 pezzi. Successivamente, da ciascuno dei due lotti si estrae a caso un pezzo. Definiti gli eventi $A =$ *"il pezzo estratto da L_1 è difettoso"*, $B =$ *"il pezzo estratto da L_2 è difettoso"*, verificare se $P(A) = P(B)$.
   (*N.B.: utilizzare gli eventi $H_r =$ "il lotto L_1 contiene r pezzi difettosi"*, $r = 0, 1, 2$).

   $$P(A) = P(B)\ ?$$

2. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione caratteristica del numero aleatorio $X = |A| + |B|$.

   $$\varphi(t) =$$

3. Dati tre eventi A, B e C, con $AB = \emptyset$, $A \vee B \subset C$, e con $P(A) = P(B) = \frac{1}{3}, P(C) = \frac{5}{6}$, determinare la funzione di ripartizione del numero aleatorio $X = |A| + B| - 2|C|$.

   $$F(x) = \begin{cases} & , \\ & , \\ & , \\ & , \end{cases}$$

4. Due automobili A e B, posizionate inizialmente nell'origine e nel punto di ascissa 4, iniziano a muoversi in contemporanea nel verso positivo dell'asse delle ascisse, con velocità aleatorie rispettive $2X$ e X. Assumendo per X una distribuzione uniforme nell'intervallo $[2, 4]$, calcolare la previsione dell'istante aleatorio T in cui A raggiunge B.

   $$\mathbb{P}(T) =$$

5. Dati tre eventi scambiabili E_1, E_2, E_3, con $P(E_2) = \frac{3}{4}, P(E_2E_3) = \frac{1}{2}, P(E_1E_2E_3) = \frac{1}{4}$, calcolare $P(E_1 \,|\, E_2)$ e $P(E_2 \,|\, E_1E_3)$.

   $P(E_1 \,|\, E_2) =$ $\qquad\qquad$ $P(E_1 \,|\, E_2E_3) =$

6. Una struttura è sollecitata in contemporanea da due forze di entità aleatorie X e Y. La densità congiunta del vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = \frac{2}{9}(3 - x - y)$, per $(x, y) \in C = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 3 - x\}$, con $f(x, y) = 0$ altrove. La struttura cede se si verifica l'evento $(X + Y > 2)$. Calcolare la probabilità p di tale evento.

   $$p =$$

7. Dato un n.a. continuo non negativo X, con funzione di rischio $h(x) = x$, $x > 0$, calcolare la varianza di X.

   $$Var(X) =$$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 20/6/2006.

1. Si ha

$$P(H_0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{5}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{2}{7}\,, \quad P(H_1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{5}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{4}{7}\,, \quad P(H_2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{5}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{1}{7}\,;$$

$$P(A\,|\,H_0) = 0\,, \quad P(A\,|\,H_1) = \frac{1}{3}\,, \quad P(A\,|\,H_2) = \frac{2}{3}\,;$$

$$P(B\,|\,H_0) = \frac{2}{4}\,, \quad P(B\,|\,H_1) = \frac{1}{4}\,, \quad P(B\,|\,H_2) = 0\,.$$

Quindi:

$$P(A) = P(A\,|\,H_0)P(H_0) + P(A\,|\,H_1)P(H_1) + P(A\,|\,H_2)P(H_2) = \cdots = \frac{2}{7}\,,$$

$$P(B) = P(B\,|\,H_0)P(H_0) + P(B\,|\,H_1)P(H_1) + P(B\,|\,H_2)P(H_2) = \cdots = \frac{2}{7}\,.$$

Pertanto: $P(A) = P(B)$.

2. Si ha $X \in \{0,1,2\}$; inoltre

$$P(AB) = \sum_r P(AB|H_r)P(H_r) = P(AB|H_1)P(H_1) = \cdots = \frac{1}{21}\,; \;\; P(AB^c) = P(A) - P(AB) = \frac{5}{21}\,;$$

$$P(A^cB) = P(B) - P(AB) = \frac{5}{21}\,; \;\; P(A^cB^c) = 1 - P(AB) - P(AB^c) - P(A^cB) = \frac{10}{21}\,.$$

Si ha

$$P(X=0) = P(A^cB^c) = \frac{10}{21}\,, \; P(X=1) = P(AB^c) + P(A^cB) = \frac{10}{21}\,, \; P(X=2) = P(AB) = \frac{1}{21}\,.$$

Allora

$$\varphi(t) = \cdots = \frac{10}{21} + \frac{10}{21}\,e^{it} + \frac{1}{21}\,e^{2it}\,.$$

3. I costituenti sono:

$$C_1 = AB^cC = A, \;\; C_2 = A^cBC = B, \;\; C_3 = A^cB^cC, \;\; C_4 = A^cB^cC^c = C^c,$$

ai quali corrispondono per X rispettivamente i valori: $-1,\ -1,\ -2,\ 0$. Inoltre

$$P(C_1) = P(C_2) = \frac{1}{3}\,, \quad P(C_3) = P(C) - P(A \vee B) = \frac{1}{6}\,, \quad P(C_4) = \frac{1}{6}\,.$$

Pertanto

$$P(X=-2) = P(C_3) = \frac{1}{6}\,, \quad P(X=-1) = P(C_1) + P(C_2) = \frac{2}{3}\,, \quad P(X=0) = P(C_4) = \frac{1}{6}\,.$$

Allora

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ \frac{1}{6}, & -2 \le x < -1 \\ \frac{5}{6}, & -1 \le x < 0 \\ 1, & x \ge 0 \end{cases}$$

4. A raggiunge B nell'istante aleatorio T tale che $2XT = 4 + XT$; pertanto $T = \frac{4}{X}$. Quindi

$$F_T(t) = P(T \le t) = P\left(X \ge \frac{4}{t}\right) = \begin{cases} 0, & t \le 1 \\ 2 - \frac{2}{t}, & 1 < t < 2 \\ 1, & t \ge 2 \end{cases}$$

Allora

$$f_T(t) = \frac{2}{t^2}\,, \quad 1 \le t \le 2\,,$$

con $f_T(t) = 0$ altrove. Pertanto

$$\mathbb{P}(T) = \int_1^2 t\,\frac{2}{t^2}\,dt = \cdots = log\,4\,.$$

5. Dall'ipotesi di scambiabilità segue $P(E_1) = P(E_3) = \frac{3}{4}$, $P(E_1E_2) = P(E_1E_3) = \frac{1}{2}$. Allora

$$P(E_1 \,|\, E_2) = \frac{P(E_1E_2)}{P(E_2)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}\,; \qquad P(E_2 \,|\, E_1E_3) = \frac{P(E_1E_2E_3)}{P(E_1E_3)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,.$$

6. Si ha $p = 1 - P(X + Y \le 2)$, con

$$P(X + Y \le 2) = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} \frac{2}{9}(3 - x - y)dy = \cdots = \frac{20}{27}\,.$$

Pertanto: $p = \frac{7}{27}$.

7. Si ha

$$S(x) = e^{-\int_0^x t\,dt} = \cdots = e^{-\frac{x^2}{2}}\,, \quad x \ge 0\,.$$

Allora: $f(x) = h(x)S(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$, per $x \ge 0$, con $f(x) = 0$ altrove.
Inoltre

$$\mathbb{P}(X) = \int_0^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,.$$

$$\mathbb{P}(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{+\infty} x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \left[-x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 2\,.$$

Pertanto: $Var(X) = 2 - \frac{\pi}{2}$.