Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Latina* - 22/4/2006)

(ogni esercizio, risolto correttamente, vale 6 punti)

1. Da un'urna, contenente sei palline, di cui due numerate con il numero 0, tre con il numero 1 e una con il numero 2, si effettuano due estrazioni senza restituzione. Indicando con X il risultato della prima estrazione e con Y il risultato della seconda estrazione, sia $Z = X+Y$. Calcolare la probabilità dell'evento $(Z \leq 0)$.

   $$P(Z \leq 0) =$$

2. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione caratteristica del n.a. Z.

   $$\varphi_Z(t) =$$

3. Dati due n. a. X, Y incorrelati e con distribuzione normale standard, calcolare il coefficiente di correlazione ρ dei n. a. $U = 2X + Y$, $V = X - 2Y$.

   $$\rho =$$

4. Dati tre eventi scambiabili E_1, E_2, E_3, con $P(E_1) = \frac{1}{2}, P(E_1E_2) = \frac{5}{18}, P(E_1E_2E_3) = \frac{1}{6}$, calcolare $P(E_1 \mid E_2)$ e $P(E_1 \mid E_2E_3)$.

   $P(E_1 \mid E_2) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $P(E_1 \mid E_2E_3) =$

5. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è $f(x, y) = ax + by$, per $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, con $a > 0, b > 0$ e con $f(x, y) = 0$ altrove. Esprimere la densità $f(x, y)$ utilizzando solo la costante a. Inoltre, determinare il valore di a tale che $P(X \leq Y) = P(X > Y)$.

   $f(x, y) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $a =$

6. Con riferimento all'esercizio precedente, assumendo $a = 1$, determinare la funzione di ripartizione marginale $F_1(x)$.

   $$F_1(x) = \begin{cases} & , \\ & , \\ & , \end{cases}$$

7. Dato un n.a. continuo non negativo X, con funzione di rischio $h(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$, $x > 0$, calcolare la densità $f(x)$, per ogni $x > 0$, e la costante c tale che $I\!P(X) = \Gamma(c)$.

   $f(x) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $c =$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 22/4/2006.

1. Si ha $(Z \leq 0) = (Z = 0) = (X = 0, Y = 0)$; pertanto

$$P(Z \leq 0) = P(X = 0, Y = 0) = P(X = 0)P(Y = 0 \,|\, X = 0) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}\,.$$

2. Si ha $Z \in \{0, 1, 2, 3\}$, con $P(Z = 0) = \frac{1}{15}$ e con

$$P(Z = 1) = P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 0) = \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}\,;$$

$$P(Z = 2) = P(X = 1, Y = 1) + P(X = 2, Y = 0) + P(X = 0, Y = 2) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{3}\,;$$

$$P(Z = 3) = P(X = 1, Y = 2) + P(X = 2, Y = 1) = \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{5}\,.$$

Pertanto

$$\varphi_Z(t) = I\!P(e^{itZ}) = \sum_h p_h e^{itz_h} = \frac{1 + 6e^{it} + 5e^{2it} + 3e^{3it}}{15}\,.$$

3. Si ha $I\!P(X) = I\!P(Y) = 0$ e quindi $I\!P(2X + Y) = I\!P(X - 2Y) = 0$; inoltre

$$I\!P(X^2) = I\!P(Y^2) = 1\,, \quad I\!P(XY) = I\!P(X)I\!P(Y) = 0\,.$$

Pertanto

$$Cov(U, V) = Cov(2X + Y, X - 2Y) = I\!P[(2X + Y)(X - 2Y)] - I\!P(2X + Y)I\!P(X - 2Y) =$$

$$= I\!P(2X^2 - 3XY - 2Y^2) = 2I\!P(X^2) - 3I\!P(XY) - 2I\!P(Y^2) = 0\,.$$

Quindi: $\rho = 0$.

4. Dall'ipotesi di scambiabilità segue $P(E_2) = P(E_1) = \frac{1}{2}$, $P(E_2E_3) = P(E_1E_2) = \frac{5}{18}$. Allora

$$P(E_1 \,|\, E_2) = \frac{P(E_1E_2)}{P(E_2)} = \frac{\frac{5}{18}}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{9}\,; \quad P(E_1 \,|\, E_2E_3) = \frac{P(E_1E_2E_3)}{P(E_2E_3)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{18}} = \frac{3}{5}\,.$$

5. Si ha
$$\int_0^1 \int_0^1 (ax+by)\,dxdy = \cdots = \frac{a+b}{2} = 1\,;$$
pertanto $b = 2-a$ e quindi: $f(x,y) = ax + (2-a)y$. Inoltre
$$P(X \le Y) = \int_0^1 dx \int_x^1 f(x,y)\,dy = \int_0^1 dx \int_x^1 [ax+(2-a)y]\,dy = \cdots = \frac{2}{3} - \frac{a}{6} = \frac{1}{2} \iff a = 1\,.$$

6. Per $x \in [0,1]$ si ha
$$f_1(x) = \int_0^1 (x+y)dy = \cdots = x + \frac{1}{2}\,,$$
con $f_1(x) = 0$ altrove. Pertanto $F_1(x) = 0$ per $x \le 0$, $F_1(x) = 1$ per $x \ge 1$. Inoltre, per $0 < x < 1$, si ha
$$F_1(x) = \int_0^x (t + \frac{1}{2})dt = \cdots = \frac{x^2+x}{2}\,.$$

7. Si ha
$$S(x) = e^{-\int_0^x \frac{3}{2}\sqrt{t}\,dt} = \cdots = e^{-x\sqrt{x}}\,,\quad x \ge 0\,.$$
Allora: $f(x) = h(x)S(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}e^{-x\sqrt{x}}$, per $x \ge 0$, con $f(x) = 0$ altrove.
Inoltre
$$\mathbb{P}(X) = \int_0^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{3}{2}x\sqrt{x}e^{-x\sqrt{x}}dx = \int_0^{+\infty} t^{\frac{2}{3}}e^{-t}dt = \Gamma\left(\frac{5}{3}\right)\,;$$
pertanto: $c = \frac{5}{3}$.