Calcolo delle probabilità (16/2/2007)

(Ing. Ambiente e Territorio - Roma)

1. Siano date due urne, U_1 contenente 1 pallina bianca e 2 nere, U_2 contenente 2 palline bianche e 4 nere. Scelta a caso una delle due urne, da essa si estraggono 2 palline con restituzione. Definiti gli eventi $E_i =$ "nell'i-ma prova viene estratta pallina bianca", $i = 1, 2$; $H =$ "l'urna scelta a caso è U_1", stabilire se gli eventi E_1 ed E_2 sono stocasticamente indipendenti.

   E_1, E_2 *stocast. indip.* ?

2. Con riferimento all'esercizio precedente, determinare la funzione di ripartizione del numero aleatorio $X = |E_1| + |E_2|$.

$$F(x) = \begin{cases} & , \\ & , \\ & , \\ & , \end{cases}$$

3. Una struttura è sollecitata in contemporanea da due forze di entità aleatorie X e Y. La densità congiunta del vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = e^{-x-y}$, per $x \geq 0$, $y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la probabilità p dell'evento $(X + Y > 5)$ e l'equazione della retta di regressione di Y su X.

   $p =$ $\qquad\qquad$ $y =$

Calcolo delle probabilità *(Ing. Amb. e Terr. - Roma)*
Soluzioni della prova scritta dell'16/2/2007.

1. Si ha

$$P(H) = P(H^c) = \frac{1}{2}, \quad P(E_i|H) = \frac{1}{3}, \quad P(E_i|H^c) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad i = 1, 2;$$

$$P(E_1E_2|H) = P(E_1|H)P(E_2|H) = \frac{1}{9}, \quad P(E_1E_2|H^c) = P(E_1|H^c)P(E_2|H^c) = \frac{1}{9};$$

quindi

$$P(E_i) = P(E_i|H)P(H) + P(E_i|H^c)P(H^c) = \frac{1}{3}, \;\; i = 1, 2.$$

$$P(E_1E_2) = P(E_1E_2|H)P(H) + P(E_1E_2|H^c)P(H^c) = \frac{1}{9} = P(E_1)P(E_2).$$

Pertanto E_1 ed E_2 sono stocasticamente indipendenti.

2. Si ha $X \in \{0, 1, 2\}$, con

$$P(X = 0) = P(E_1^cE_2^c) = P(E_1^c)P(E_2^c) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9},$$

$$P(X = 1) = P(E_1E_2^c) + P(E_1^cE_2) = P(E_1)P(E_2^c) + P(E_1^c)P(E_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9},$$

$$P(X = 2) = P(E_1E_2) = P(E_1)P(E_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

Pertanto

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{4}{9}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{8}{9}, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

3. Si ha

$$p = P(X + Y > 5) = 1 - P(X + Y \leq 5) = 1 - \int_0^5 dx \int_0^{(5-x)} e^{-x-y}\, dy =$$

$$= 1 - \int_0^5 e^{-x}\left(1 - e^{-(5-x)}\right) dx = 1 - \int_0^5 e^{-x}\, dx + \int_0^5 e^{-5}\, dx = 1 - (1 - e^{-5}) + 5e^{-5} = 6e^{-5}.$$

Inoltre

$$f_1(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x-y}\, dy = \cdots = e^{-x}, \;\; x \geq 0; \qquad f_1(x) = 0, \; x < 0;$$

$$f_2(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x-y}\, dx = \cdots = e^{-y}, \;\; y \geq 0; \qquad f_2(y) = 0, \; y < 0.$$

Quindi X ed Y hanno uguale distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 1$. Infine, essendo $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$, X ed Y sono stocasticamente indipendenti e si ha $\rho = 0$. Allora, l'equazione della retta di regressione di Y su X, $y = m_2 + \rho \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - m_1)$, nel nostro caso diventa $y = m_2$, con $m_2 = \frac{1}{\lambda} = 1$; ovvero $y = 1$.