Calcolo delle probabilità (11/4/2007)

(Ing. Ambiente e Territorio - Roma)

1. La densità di probabilità congiunta di un vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Posto $U = X + Y, V = 2Y - 1$, calcolare la covarianza di U, V e la probabilità p dell'evento $(-3 \leq V \leq 3)$.

   $Cov(U, V) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $p =$

2. Siano date due urne U_1, contenente 3 palline numerate da 1 a 3, e U_2, contenente 6 palline numerate da 1 a 6. Da U_1 si effettuano 2 estrazioni con restituzione, mentre da U_2 si effettuano 4 estrazioni con restituzione. Definiti gli eventi $A =$ *"nelle 2 estrazioni da U_1 almeno una volta esce il numero 1"*, $B =$ *"nelle 4 estrazioni da U_2 almeno una volta esce il numero 1"*, stabilire se: (i) $P(A) > P(B)$, (ii) $P(A) < P(B)$, (iii) $P(A) = P(B)$.
   (*Nota: utilizzare gli eventi $E_i =$ "nell'i-ma estrazione da U_1 esce il numero 1", $i = 1, 2$; $F_j =$ "nella j-ma estrazione da U_2 esce il numero 1", $j = 1, 2, 3, 4$.*)

   $P(A) \qquad P(B)$

3. La densità congiunta di un vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = \frac{1}{4} xy$, per $(x, y) \in [0, 2] \times [0, 2]$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Definiti gli eventi $A = (X \leq 1)$, $B = (Y \leq 1)$, calcolare la funzione di ripartizione $F(z)$ del numero aleatorio $Z = |A| + |B|$.

$$F(z) = \begin{cases} & , \\ & , \\ & , \\ & , \end{cases}$$

Calcolo delle probabilità *(Ing. Amb. e Terr. - Roma)*
Soluzioni della prova scritta del 11/4/2007.

1. Si ha

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,;$$
$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\,.$$

Pertanto X ed Y hanno una distribuzione normale standard; inoltre, osservando che $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ per ogni (x,y), segue che X e Y sono stocasticamente indipendenti e quindi anche incorrelati. Allora

$$Cov(U,V) = Cov(X+Y, 2Y-1) = Cov(X, 2Y-1) + Cov(Y, 2Y-1) =$$
$$= 2\,Cov(X,Y) + 2\,Cov(Y,Y) = 2\,Var(Y) = 2\,.$$

Infine

$$P(-3 \le V \le 3) = P(-3 \le 2Y-1 \le 3) = P(-1 \le Y \le 2) = \Phi(2) - \Phi(-1) =$$
$$= \Phi(2) - [1 - \Phi(1)] = \Phi(2) + \Phi(1) - 1 \simeq 0.9772 + 0.8413 - 1 = 0.8185\,.$$

2. Si ha $P(E_i) = \frac{1}{3}$, $P(F_j) = \frac{1}{6}$; inoltre

$$P(A^c) = P(E_1^c E_2^c) = P(E_1^c)P(E_2^c) = \frac{4}{9}, \quad P(B^c) = P(F_1^c \cdots F_4^c) = P(F_1^c)\cdots P(F_4^c) = \frac{625}{1296}\,.$$

Allora $P(A) = \frac{5}{9} \simeq 0.555$, $P(B) = \frac{671}{1296} \simeq 0.518$; pertanto $P(A) > P(B)$.

3. Si ha $f_1(x) = 0$, $f_2(y) = 0$, per $x \notin [0,2]$, $y \notin [0,2]$; inoltre, per $x \in [0,2]$, $y \in [0,2]$, si ha

$$f_1(x) = \int_0^2 \frac{1}{4}\, xy\, dy = \frac{1}{2}\, x\,; \quad f_2(y) = \int_0^2 \frac{1}{4}\, xy\, dx = \frac{1}{2}\, y\,.$$

Pertanto $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ per ogni (x,y), ovvero X e Y sono stocasticamente indipendenti; di conseguenza, anche A e B sono stocasticamente indipendenti. Inoltre, A e B sono equiprobabili, con

$$P(A) = P(B) = \int_0^1 \frac{1}{2}\, x\, dx = \frac{1}{4}\,.$$

Allora Z ha una distribuzione binomiale di parametri $n = 2$, $p = \frac{1}{4}$, con

$$P(Z=0) = P(A^cB^c) = \frac{9}{16},\ P(Z=1) = P(AB^c) + P(A^cB) = \frac{3}{8},\ P(Z=2) = P(AB) = \frac{1}{16}.$$

Pertanto

$$F(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \frac{9}{16}, & 0 \le z < 1, \\ \frac{15}{16}, & 1 \le z < 2, \\ 1, & z \ge 2. \end{cases}$$