Calcolo delle probabilità (5/5/2007)

(Ing. Ambiente e Territorio - Roma)

1. Da un'urna contenente 2 palline bianche e 2 nere si effettuano 3 estrazioni senza restituzione. Definiti gli eventi $E_i =$ *"l'i-ma pallina estratta è bianca"*, $i = 1, 2, 3$, e posto $X = |E_1| + |E_2|$, $Y = |E_2| + |E_3|$, calcolare la covarianza di X, Y.

   $Cov(X, Y) =$

2. Con riferimento al vettore aleatorio (X, Y) dell'esercizio precedente, calcolare i punti (x, y) possibili e stabilire se X ed Y sono stocasticamente indipendenti.

   (x, y) : X, Y *stocast. indip.* ?

3. Sia T il triangolo di vertici i punti $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$. La densità congiunta di un vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = 2xy$, per $(x, y) \in T$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la funzione di ripartizione di X, per ogni $x \in (0, 1)$, e la probabilità p dell'evento $(X - Y \leq 0)$.

   $F_1(x) =$ $p =$

Calcolo delle probabilità *(Ing. Amb. e Terr. - Roma)*
Soluzioni della prova scritta del 5/5/2007.

1. Gli eventi E_i sono equiprobabili, con $P(E_i) = \frac{1}{2}$; quindi
$$\mathbb{P}(X) = P(E_1) + P(E_2) = P(E_2) + P(E_3) = \mathbb{P}(Y) = 1\,.$$
Inoltre
$XY = (|E_1|+|E_2|)(|E_2|+|E_3|) = |E_1E_2|+|E_1E_3|+|E_2E_2|+|E_2E_3| = |E_1E_2|+|E_1E_3|+|E_2|+|E_2E_3|$;
con $P(E_1E_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, e con
$$P(E_1E_3) = P(E_1E_2E_3) + P(E_1E_2^cE_3) = P(E_1E_2^cE_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\,,$$
$$P(E_2E_3) = P(E_1E_2E_3) + P(E_1^cE_2E_3) = P(E_1^cE_2E_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\,.$$
Allora
$$\mathbb{P}(XY) = P(E_1E_2) + P(E_1E_3) + P(E_2) + P(E_2E_3) = 1\,;$$
pertanto
$$Cov(X,Y) = \mathbb{P}(XY) - \mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y) = 1 - 1 = 0\,.$$

2. Osservando che $E_1E_2E_3 = E_1^cE_2^cE_3^c = \emptyset$, i costituenti relativi agli eventi E_1, E_2, E_3 sono
$$E_1E_2E_3^c\,,\quad E_1E_2^cE_3\,,\quad E_1^cE_2E_3\,,\quad E_1E_2^cE_3^c\,,\quad E_1^cE_2E_3^c\,,\quad E_1^cE_2^cE_3\,.$$
I corrispondenti valori di (X,Y) sono
$$(2,1),\quad (1,1),\quad (1,2),\quad (1,0),\quad (1,1),\quad (0,1)\,.$$
Inoltre, osservando ad esempio che
$$P(X=2,Y=1) = P(E_1E_2E_3^c) = P(E_1E_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\,,$$
$$P(X=2) = P(E_1E_2E_3^c) = P(E_1E_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\,,$$
$$P(Y=1) = \cdots = 1 - P(E_1^cE_2E_3) - P(E_1E_2^cE_3^c) < 1\,,$$
segue $P(X=2,Y=1) \neq P(X=2)P(Y=1)$.
Pertanto, X ed Y non sono stocasticamente indipendenti.

3. Per ogni $x \in (0,1)$ si ha
$$f_1(x) = \int_0^{2x} 2xy dy = x[y^2]_0^{2x} = 4x^3\,,$$
con $f_1(x) = 0$ altrove. Allora $F_1(x) = 0$ per $x \leq 0$; $F_1(x) = 1$ per $x \geq 1$; inoltre
$$F_1(x) = \int_0^x 4t^3 dt = x^4\,,\quad 0 < x < 1\,.$$
Infine
$$p = P(Y \geq X) = 1 - P(Y < X) = 1 - \int_0^1 dx \int_0^x 2xydx = 1 - \int_0^1 x^3 dx = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}\,.$$
Nota: in modo diretto si ha
$$p = P(Y \geq X) = \int_0^1 dx \int_x^{2x} 2xydx = \cdots = \frac{3}{4}\,.$$