

(Ing. Ambiente e Territorio - Roma)

1. Dati 10 dischi magnetici, sia X_i il n.a. continuo che rappresenta “la distanza (in micron) dall’inizio di una traccia sull’i-mo disco magnetico sino al primo difetto”, $i = 1, \dots, 10$. La densità di probabilità di ciascun X_i è esponenziale di parametro $\lambda = \frac{1}{2000}$. Definiti gli eventi $E_i = (X_i > 1000)$, $i = 1, \dots, 10$, sia $Z = \frac{|E_1| + \dots + |E_{10}|}{10}$ la frazione di dischi la cui distanza sino al primo difetto è maggiore di 1000 micron. Calcolare la previsione μ di Z .

$$\mu =$$

2. Un vettore aleatorio (X, Y) ha una distribuzione uniforme sul triangolo T , di vertici i punti $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$. Le componenti X e Y rappresentano rispettivamente la base e l’altezza (aleatorie) di un rettangolo. Calcolare: (i) la previsione m dell’area A del rettangolo; (ii) la probabilità p che il perimetro del rettangolo sia maggiore di 2.

$$m =$$

$$p =$$

3. Un cassetto contiene 5 chiavi indistinguibili delle quali una sola apre una certa serratura. Dal cassetto si prendono in blocco 2 chiavi; quindi, si utilizza a caso una delle 2 chiavi cercando di aprire la serratura. Definiti gli eventi $H =$ “fra le 2 chiavi prese in blocco c’è quella che apre la serratura”, $E =$ “la chiave scelta a caso non apre la serratura”, calcolare $P(H|E)$.

$$P(H|E) =$$

4. Il diametro di un perno prodotto in serie è un n.a. X con distribuzione normale di parametri $m = 12,20$ e $\sigma = 0,02$ (in mm). Sono conformi, ovvero non sono scartati, i perni con diametro compreso tra 12,16 e 12,24. Calcolare la probabilità α che un perno sia conforme. (ricordiamo che: $\Phi(2) = 0,9772$)

$$\alpha =$$

Calcolo delle probabilità (*Ing. Amb. e Terr. - Roma*)
Soluzioni della prova scritta del 16/6/2007.

1. Osservando che

$$P(E_i) = P(X_i > 1000) = \int_{1000}^{+\infty} \frac{1}{2000} e^{-\frac{x}{2000}} dx = \dots = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}},$$

segue

$$P(Z) = \frac{P(|E_1|) + \dots + P(|E_{10}|)}{10} = \frac{P(E_1) + \dots + P(E_{10})}{10} = P(E_i) = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

2. L'area di T è pari a 2; pertanto $f(x, y) = \frac{1}{2}$ per $(x, y) \in T$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Allora

$$m = \mathbb{P}(A) = \int \int_T xyf(x, y) dx dy = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} \frac{1}{2} xy dy = \frac{1}{4} \int_0^2 x(2-x)^2 dx = \dots = \frac{1}{3}.$$

Inoltre

$$p = P(2X + 2Y > 2) = 1 - P(X + Y \leq 1) = 1 - \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{1}{2} dy = \dots = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

3. Si ha

$$P(H) = \frac{\binom{1}{1} \binom{4}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{2}{5}, \quad P(E|H) = \frac{1}{2}, \quad P(E|H^c) = 1;$$

quindi

$$P(H|E) = \frac{P(E|H)P(H)}{P(E|H)P(H) + P(E|H^c)P(H^c)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + 1 \cdot \frac{3}{5}} = \frac{1}{4}.$$

4. Posto $Z = \frac{X-m}{\sigma} = \frac{X-12,20}{0,02}$, si ha

$$\begin{aligned} \alpha &= P(12,16 < X < 12,24) = P\left(\frac{12,16 - 12,20}{0,02} < Z < \frac{12,24 - 12,20}{0,02}\right) = \\ &= P(-2 < Z < 2) = \Phi(2) - (1 - \Phi(2)) = 2\Phi(2) - 1 \simeq 0,9544. \end{aligned}$$