Calcolo delle probabilità (7/7/2007)

(Ing. Ambiente e Territorio - Roma)

1. I componenti prodotti da una ditta possono avere due tipi di difetti ed il generico componente è giudicato difettoso se presenta almeno un difetto. Scelto a caso un componente, siano definiti gli eventi $E_i =$ *"il componente presenta l'i−esimo difetto"*, $i = 1, 2$. Assumendo E_1 ed E_2 stocasticamente indipendenti, con $P(E_1) = 0.02, P(E_2) = 0.03$, calcolare: (i) la probabilità α che il componente non sia difettoso; (ii) la probabilità β che il componente non presenti il secondo difetto, supposto che sia difettoso.

   $\alpha =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\beta =$

2. Dato un punto aleatorio (X, Y) scelto a caso nel quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$, calcolare la probabilità p che (X, Y) appartenga al triangolo T di vertici i punti $(0, 0), (\frac{1}{2}, 0), (0, \frac{1}{2})$. Inoltre, calcolare lo scarto standard σ del numero aleatorio $Z = \frac{X+Y}{2}$.

   $p =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\sigma =$

3. Per assemblare un sistema, si prendono a caso 3 componenti da una cassa che ne contiene 6, dei quali 2 sono guasti. Il sistema funziona solo se il numero aleatorio X di componenti guasti, fra i 3 scelti a caso, è minore o uguale a 1. Calcolare: (i) la probabilità p_1 che il sistema funzioni; (ii) la probabilità p_2 che il sistema funzioni, supposto che almeno uno dei 3 componenti scelti a caso sia guasto.

   $p_1 =$ $\qquad\qquad\qquad$ $p_2 =$

4. Una struttura è soggetta a un carico aleatorio X con densità di probabilità $f(x) = \frac{1}{4}$ per $x \in [0, 2]$, $f(x) = \frac{2x-3}{4}$ per $x \in (2, 3]$, $f(x) = 0$ altrove. Verificare quale delle seguenti affermazioni è quella giusta: (i) $\mathbb{P}(X) < 2$; *(ii)* $\mathbb{P}(X) \geq 2$.

   $\mathbb{P}(X) \qquad 2$

Calcolo delle probabilità *(Ing. Amb. e Terr. - Roma)*
Soluzioni della prova scritta del 7/7/2007.

1. Si ha:

   $\alpha = P(E_1^c E_2^c) = P(E_1^c)P(E_2^c) = 0,9506;$

   $\beta = P(E_2^c \,|\, E_1 \vee E_2) = 1 - P(E_2 \,|\, E_1 \vee E_2) =$

   $= 1 - \frac{P[E_2 \wedge (E_1 \vee E_2)]}{P(E_1 \vee E_2)} = 1 - \frac{P(E_2)}{1 - P(E_1^c E_2^c)} = 1 - \frac{0,03}{0,0494} \simeq 0,3927.$

2. (X,Y) ha una distribuzione uniforme; quindi $f(x,y) = 1$ per $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Allora, osservando che l'equazione della retta passante per i punti $(\frac{1}{2}, 0), (0, \frac{1}{2})$ è $x + y = \frac{1}{2}$, segue

   $$p = P\left(X + Y \leq \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\frac{1}{2}-x} f(x,y)\, dy = \cdots = \mu(T) = \frac{1}{8}\,.$$

   Inoltre, come si può verificare, X e Y hanno una distribuzione uniforme su $[0,1]$ e sono stocasticamente indipendenti. Pertanto

   $$Var(X) = Var(Y) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{12}\,, \quad Cov(X,Y) = 0\,,$$

   da cui segue

   $$\sigma = \sqrt{\frac{Var(X) + Var(Y)}{4}} = \frac{1}{2\sqrt{6}}\,.$$

3. Si ha $X \sim H(6, 3, \frac{1}{3})$ e quindi $P(X = k) = \frac{\binom{2}{k}\binom{4}{2-k}}{\binom{6}{3}}$, $k = 0, 1, 2$; pertanto

   $$p_1 = P(X \leq 1) = \sum_{k=0}^{1} \frac{\binom{2}{k}\binom{4}{2-k}}{\binom{6}{3}} = 1 - P(X = 2) = 1 - \frac{\binom{2}{2}\binom{4}{3-2}}{\binom{6}{3}} = \frac{4}{5}\,.$$

   $$p_2 = P(X \leq 1 \,|\, X \geq 1) = \frac{P(X = 1)}{P(X = 1) + P(X = 2)} = \frac{P(X = 1)}{1 - P(X = 0)} = \cdots = \frac{\binom{2}{1}\binom{4}{2}}{\binom{6}{3} - \binom{4}{3}} = \frac{3}{4}\,.$$

4. Si ha

   $$I\!P(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \int_0^2 \frac{x}{4}\, dx + \int_2^3 \frac{x(2x-3)}{4}\, dx = \frac{43}{24} \simeq 1.792 < 2\,.$$