Calcolo delle probabilità (20/9/2007)

(Ing. Ambiente e Territorio - Roma)

1. Date due urne, U_1 contenente 2 palline bianche e 4 nere e U_2 contenente 4 palline bianche e 2 nere, da una di esse si effettuano estrazioni con restituzione fino ad ottenere per la prima volta pallina bianca. L'urna è stata scelta in base all'esito del lancio di un dado: U_1 se è uscita la faccia 6, U_2 altrimenti. Supposto che la pallina bianca sia uscita per la prima volta alla quarta estrazione (evento A), calcolare la probabilità condizionata p che non sia uscita la faccia 6 (evento H). (*Suggerimento: utilizzare gli eventi* $E_i =$ *"la pallina nell'i−esima estrazione è nera"*, $i \geq 1$.)

   $p =$

2. In una radio ci sono quattro pile ognuna delle quali ha un tempo di vita aleatorio con densità $f(x) = 100/x^2$ se $x > 100$, con $f(x) = 0$ altrove. Si supponga che gli eventi $E_i =$ *"l'i−esima pila deve essere sostituita entro 120 ore"*, $i = 1, 2, 3, 4$, siano stocasticamente indipendenti. Calcolare la probabilità p che al massimo una delle quattro pile debba essere sostituita entro 120 ore di attività.

   $p =$

3. In un ufficio aperto al pubblico ci sono due sportelli, in cui vengono gestiti due differenti tipi di pratiche. Siano X e Y i numeri aleatori di clienti che si presentano in un fissato intervallo di tempo ai due sportelli. Assumendo X, Y stocasticamente indipendenti e con distribuzione di Poisson di parametri $\lambda_X = 2, \lambda_Y = 4$, calcolare la probabilità α dell'evento $(X + Y > 1)$ e la probabilità β dell'evento condizionato $(X = 0 \,|\, X + Y \leq 1)$

   $\alpha =$ $\beta =$

4. Una persona, a partire da un certo istante, attende ad un capolinea di autobus due amici in viaggio su due linee differenti A e B. Siano X e Y i tempi aleatori di attesa (in un'opportuna unità di misura) fino all'arrivo dei due autobus. La densità congiunta del vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = 3e^{-(x+3y)}$ per $x \geq 0, y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Indicando con Z il tempo aleatorio di attesa al capolinea di tale persona, calcolare la probabilità $\gamma = P(Z > 1)$.

   $\gamma =$

Calcolo delle probabilità *(Ing. Amb. e Terr. - Roma)*
Soluzioni della prova scritta del 20/9/2007.

1. Si ha $A = E_1E_2E_3E_4^c$; inoltre, essendo le estrazioni con restituzione, gli eventi $\{E_i\,,\, i \geq 1\}$ sono stocasticamente indipendenti e si ha

$$p = P(H\,|\,A) = P(H\,|\,E_1E_2E_3E_4^c) = \frac{P(E_1E_2E_3E_4^c\,|\,H)P(H)}{P(E_1E_2E_3E_4^c)}\,,$$

con

$$P(E_1E_2E_3E_4^c) = P(E_1E_2E_3E_4^c\,|\,H)P(H) + P(E_1E_2E_3E_4^c\,|\,H^c)P(H^c) =$$
$$= \left(\frac{2}{6}\right)^3 \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{5}{6} + \left(\frac{4}{6}\right)^3 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6}\,.$$

Dunque: $p = \dfrac{5}{9}$.

2. Per ogni i si ha $P(E_i) = \displaystyle\int_{100}^{120} f(x)\,dx = ... = \frac{1}{6}$. Inoltre

$$P(E_1E_2^cE_3^cE_4^c) = P(E_1^cE_2E_3^cE_4^c) = P(E_1^cE_2^cE_3E_4^c) = P(E_1^cE_2^cE_3^cE_4) =$$
$$= P(E_1)P(E_2^c)P(E_3^c)P(E_4^c) = \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^3\,, \quad P(E_1^cE_2^cE_3^cE_4^c) = \left(\frac{5}{6}\right)^4\,.$$

Pertanto: $p = 4\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^3 + \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{375}{432} \simeq 0.8681$.

3. Si ha $\alpha = 1 - P(X + Y \leq 1)$, con

$$P(X + Y \leq 1) = P(X = 0, Y = 0) + P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 0) =$$
$$= P(X = 0)P(Y = 0) + P(X = 0)P(Y = 1) + P(X = 1)P(Y = 0) =$$
$$= e^{-2}e^{-4} + e^{-2}4e^{-4} + 2e^{-2}e^{-4} = 7e^{-6}\,.$$

Quindi: $\alpha = 1 - 7e^{-6}$. Inoltre

$P(X = 0, X+Y \leq 1) = P(X = 0)P(Y = 0)+P(X = 0)P(Y = 1) = e^{-2}e^{-4}+e^{-2}4e^{-4} = 5e^{-6}\,;$

pertanto

$$\beta = \frac{P(X = 0, X + Y \leq 1)}{P(X + Y \leq 1)} = \frac{5\,e^{-6}}{7\,e^{-6}} = \frac{5}{7}\,.$$

4. Si ha $Z = max\,\{X, Y\}$; inoltre $(Z > 1) = (Z \leq 1)^c$. Pertanto

$$P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - P(X \leq 1, Y \leq 1) = 1 - \int_0^1 dx \int_0^1 3e^{-(x+3y)}dy =$$

$$= 1 - \int_0^1 e^{-x}[-e^{-3y}]_0^1 dx = 1 - \int_0^1 e^{-x}(1 - e^{-3})dx = 1 - (1 - e^{-1})(1 - e^{-3}) = e^{-1} + e^{-3} - e^{-4}\,.$$