Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Latina* - 10/7/2007)

(il punteggio massimo si ottiene risolvendo correttamente 5 esercizi)

1. Un sistema è costituito da 3 componenti in parallelo provenienti da un lotto che ne conteneva 7, dei quali 3 guasti. Sia X il numero aleatorio di componenti guasti fra i 3 del sistema. Calcolare: (i) la probabilità α che il sistema non funzioni; (ii) la probabilità β che il sistema funzioni, supposto che almeno uno dei suoi 3 componenti sia guasto.

   $\alpha =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\beta =$

2. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione caratteristica $\varphi(t)$ del numero aleatorio X^2.

   $\varphi(t) =$

3. Dato un punto aleatorio (X, Y), scelto a caso nel rettangolo $R = [1, 3] \times [1, 2]$, e posto $V = X - Y$, $Z = X + Y$, calcolare la covarianza di V e Z.

   $Cov(V, Z) =$

4. Con riferimento al vettore aleatorio (X, Y) dell'esercizio precedente, definiti gli eventi $A = (Y > X)$, $B = (X + Y > 4)$, stabilire quali delle seguenti affermazioni è quella giusta: (i) $P(A) > P(B)$; (ii) $P(A) < P(B)$; (iii) $P(A) = P(B)$.

   $P(A) \qquad P(B)$

5. Con riferimento al vettore aleatorio (X, Y) dell'esercizio 3, calcolare la funzione di ripartizione $F(z)$ del numero aleatorio $Z = X + Y$.

   $F(z) =$

6. Un sistema S, costituito da due moduli in parallelo M_1, M_2, dev'essere utilizzato in un dato intervallo di tempo $[0, \tau]$. M_1 è formato da 2 dispositivi in serie D_1, D_2, mentre M_2 è formato da 2 dispositivi in serie D_3, D_4. I tempi fino al guasto di $D_1, \ldots, D_4$ sono dei numeri aleatori $X_1, \ldots, X_4$ stocasticamente indipendenti e con distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 1$. Definiti gli eventi $E_i =$ *"il dispositivo D_i funziona senza guastarsi nell'intervallo* $[0, \tau]$*"*, $i = 1, \ldots, 4$, calcolare la probabilità α che S funzioni senza guastarsi nell'intervallo $[0, \tau]$. Inoltre, calcolare per ogni $t > 0$ la funzione di rischio $h_T(t)$ del tempo aleatorio T fino al guasto di S .

   $\alpha =$ $\qquad\qquad\qquad$ $h_T(t) =$

7. Considerata una sequenza di lanci di una moneta, siano definiti gli eventi $E_i =$ *"nell'i-mo lancio esce Testa"*, $i = 1, 2, \ldots$. Gli eventi $E_1, E_2, \ldots$ sono giudicati scambiabili, con $P(E_1) = \frac{3}{8}, P(E_1^c E_2) = \frac{7}{32}$, $P(E_1^c E_2^c E_3) = \frac{17}{128}$. Calcolare la probabilità p di avere *Croce nel* 3^0 *e nel* 5^0 *lancio*. Inoltre, stabilire se la probabilità condizionata γ di avere *Croce nel* 6^0 *lancio*, supposto di aver avuto *Croce nel* 3^0 *e nel* 5^0 *lancio*, è maggiore, oppure minore o uguale, di $\frac{1}{2}$. (*Ricordiamo che:* $A \vee B = A \vee A^c B$)

   $p =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\gamma \qquad \dfrac{1}{2}$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 10/7/2007.

1. Si ha $X \sim H(7,3,\frac{3}{7})$ e quindi $P(X=k) = \frac{\binom{3}{k}\binom{4}{3-k}}{\binom{7}{3}}$, $k=0,1,2,3$; pertanto $\alpha = P(X=3) = \frac{\binom{3}{3}\binom{4}{0}}{\binom{7}{3}} = \frac{1}{35}$; $\beta = P(X \leq 2 \,|\, X \geq 1) = \frac{P(X=1)+P(X=2)}{P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)} = $ $= \frac{1-P(X=0)-P(X=3)}{1-P(X=0)} = \cdots = \frac{\binom{7}{3}-\binom{3}{0}\binom{4}{3}-\binom{3}{3}\binom{4}{0}}{\binom{7}{3}-\binom{3}{0}\binom{4}{3}} = \frac{30}{31}$.

2. Si ha $X^2 \in \{0,1,4,9\}$, con

$$P(X^2=0) = P(X=0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{4}{3-0}}{\binom{7}{3}} = \frac{4}{35}\,, \quad P(X^2=1) = P(X=1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{3-1}}{\binom{7}{3}} = \frac{18}{35}\,.$$

$$P(X^2=4) = P(X=2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{4}{3-2}}{\binom{7}{3}} = \frac{12}{35}\,, \quad P(X^2=9) = P(X=3) = \frac{\binom{3}{3}\binom{4}{3-3}}{\binom{7}{3}} = \frac{1}{35}\,,$$

Pertanto

$$\varphi(t) = I\!P(e^{itX^2}) = \sum_{k=0}^{3} \frac{\binom{3}{k}\binom{4}{3-k}}{\binom{7}{3}}\, e^{itk^2} = \frac{4+18e^{it}+12e^{4it}+e^{9it}}{35}\,.$$

3. (X,Y) ha una distribuzione uniforme su R; quindi $f(x,y) = \frac{1}{2}$ per $(x,y) \in R$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Inoltre, come si può verificare, X e Y sono stocasticamente indipendenti ed hanno una distribuzione uniforme, rispettivamente, in $[1,3]$ e $[1,2]$. Pertanto

$$Var(X) = \frac{(3-1)^2}{12} = \frac{1}{3}\,, \quad Var(Y) = \frac{(2-1)^2}{12} = \frac{1}{12}\,, \quad Cov(X,Y) = 0\,.$$

Allora

$$Cov(V,Z) = I\!P(VZ) - I\!P(V)I\!P(Z) = I\!P(X^2-Y^2) - [I\!P(X)-I\!P(Y)][I\!P(X)+I\!P(Y)] =$$

$$= I\!P(X^2) - [I\!P(X)]^2 - I\!P(Y^2) + [I\!P(Y)]^2 = Var(X) - Var(Y) = \frac{1}{4}\,.$$

4. Siano T_1 il triangolo di vertici $(1,1),(2,2),(1,2)$ e T_2 il triangolo di vertici $(3,1),(3,2),(2,2)$. Osserviamo che le equazioni delle rette passanti per i punti $(1,1),(2,2)$ e per i punti $(2,2),(3,1)$ sono rispettivamente $y=x$ e $y=4-x$. Allora, ricordando che $f(x,y) = \frac{1}{2}$ per $(x,y) \in R$, con $f(x,y) = 0$ altrove, si ha

$$P(A) = P[(X,Y) \in T_1] = \int_1^2 dx \int_x^2 \frac{1}{2}\, dy = \cdots = \frac{\mu(T_1)}{\mu(R)} = \frac{1}{4}\,,$$

$$P(B) = P[(X,Y) \in T_2] = \int_2^3 dx \int_{4-x}^2 \frac{1}{2}\, dy = \cdots = \frac{\mu(T_2)}{\mu(R)} = \frac{1}{4}\,.$$

Pertanto: $P(A) = P(B)$.

5. Ricordando che (X, Y) ha una distribuzione uniforme, si ha
$$F(z) = P(Z \leq z) = P(X + Y \leq z) = P[(X, Y) \in A_z] = \frac{\mu(A_z)}{\mu(R)} = \frac{\mu(A_z)}{2},$$
dove A_z è un opportuno sottoinsieme del rettangolo R che si determina considerando la retta di equazione $x + y = z$ parallela alla bisettrice del II e IV quadrante.
In particolare: (i) A_z è l'insieme vuoto per $z < 2$; (ii) A_z è il triangolo di vertici $(1, 1)$, $(z - 1, 1), (1, z - 1)$ per $2 \leq z \leq 3$; (iii) A_z è il trapezio di vertici $(1, 1), (z - 1, 1)$, $(z - 2, 2), (1, 2)$ per $3 < z \leq 4$; (iv) A_z è l'insieme complementare (rispetto ad R) del triangolo di vertici $(3, z - 3), (3, 2), (z - 2, 2)$ per $4 < z < 5$; (v) A_z coincide con R per $z \geq 5$. Determinando di volta in volta l'area di A_z si ottiene: (i) $F(z) = 0$ per $z < 2$; (ii) $F(z) = \frac{(z-2)^2}{4}$ per $2 \leq z \leq 3$; (iii) $F(z) = \frac{2z-5}{4}$ per $3 < z \leq 4$; (iv) $F(z) = 1 - \frac{(5-z)^2}{4}$ per $4 < z < 5$; (v) $F(z) = 1$ per $z \geq 5$.

6. Si ha: $P(E_i) = P(X_i > \tau) = \int_\tau^{+\infty} e^{-x} dx = \cdots = e^{-\tau}$, $i = 1, \ldots, 4$; pertanto
$$\alpha = P(E_1E_2 \vee E_3E_4) = P(E_1E_2) + P(E_3E_4) - P(E_1E_2E_3E_4) =$$
$$= P(E_1)P(E_2) + P(E_3)P(E_4) - P(E_1)P(E_2)P(E_3)P(E_4) = 2e^{-2\tau} - e^{-4\tau}.$$
Più in generale, per ogni $t > 0$, si ha: $P(X_i > t) = \int_t^{+\infty} e^{-x} dx = e^{-t}$, $i = 1, \ldots, 4$; quindi
$$S_T(t) = P(T > t) = P[(X_1 > t, X_2 > t) \vee (X_3 > t, X_4 > t)] = \cdots = 2e^{-2t} - e^{-4t}.$$
Allora
$$h_T(t) = \frac{f_T(t)}{S_T(t)} = -\frac{S'_T(t)}{S_T(t)} = -\frac{-4e^{-2t} + 4e^{-4t}}{2e^{-2t} - e^{-4t}} = \frac{4e^{2t} - 4}{2e^{2t} - 1}.$$

7. Dall'ipotesi di scambiabilità si ha
$$P(E_3) = P(E_1) = \frac{3}{8}, \quad P(E_3^cE_5) = P(E_1^cE_2) = \frac{7}{32},$$
quindi
$$P(E_3 \vee E_5) = P(E_3 \vee E_3^cE_5) = P(E_3) + P(E_3^cE_5) = \frac{19}{32};$$
pertanto
$$p = P(E_3^cE_5^c) = 1 - P(E_3 \vee E_5) = \frac{13}{32}.$$
Inoltre:
$$P(E_3^cE_5^cE_6) = P(E_1^cE_2^cE_3) = \frac{17}{128},$$
quindi
$$P(E_3 \vee E_5 \vee E_6) = P(E_3 \vee E_5) + P[(E_3 \vee E_5)^c \wedge E_6] = P(E_3) + P(E_3^cE_5) + P(E_3^cE_5^cE_6) = \frac{93}{128};$$
pertanto
$$P(E_3^cE_5^cE_6^c) = 1 - P(E_3 \vee E_5 \vee E_6) = \frac{35}{128}.$$
Allora
$$\gamma = P(E_6^c \,|\, E_3^cE_5^c) = \frac{P(E_3^cE_5^cE_6^c)}{P(E_3^cE_5^c)} = \frac{\frac{35}{128}}{\frac{13}{32}} = \frac{35}{52} > \frac{1}{2}.$$