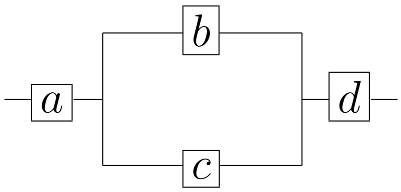
**Probabilità e Statistica** (*Ing. Amb. Terr.* - *Latina* - 12/1/2007)

*(il punteggio massimo corrisponde a 5 esercizi risolti correttamente)*

1. I quattro componenti $a, b, c, d$ del sistema in figura, in un dato intervallo di tempo $I$, hanno ognuno una probabilità di funzionamento senza guasti pari a $p$. Indicando con $A$ l'evento *"il componente $a$ funziona senza guasti nell'intervallo $I$"*, e analogamente per gli altri eventi $B, C, D$, si assumano i 4 eventi stocasticamente indipendenti. Indicando con $\alpha$ la probabilità che il sistema funzioni nell'intervallo $I$, condizionata all'evento $B \vee C$ , determinare per quale valore di $p$ risulta $\alpha = \frac{1}{2}$. Verificare inoltre che, per ogni fissato $p$, si ha $P[A \wedge (B \vee C) \wedge D \mid B] = P[A \wedge (B \vee C) \wedge D \mid C] = \alpha$.




p =

2. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione caratteristica $\varphi(t)$ del numero aleatorio $X$ di componenti del sistema che funzionano senza guasti nell'intervallo $I$.

$$\varphi(t) =$$

3. I tempi aleatori impiegati da due veicoli per percorrere un tratto di strada sono rispettivamente $X$ e $Y$. La densità congiunta del vettore $(X, Y)$ è $f(x, y) = x + y$, per $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Stabilire se vale l'uguaglianza $P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq y, Y \leq x)$, con $(x, y) \in (0, 1) \times (0, 1)$.

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq y, Y \leq x) \ \ ?$$

4. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione di ripartizione $F_1(x)$ del n. a. $X$.

$$F_1(x) = \begin{cases} & , \\ & , \\ & , \end{cases}$$

5. Date 8 scatole di componenti elettronici, in una il $25\%$ dei pezzi sono difettosi, mentre le altre 7 contengono in parti uguali pezzi difettosi e pezzi buoni. Si sceglie a "caso" una scatola e da questa si estraggono con restituzione 3 pezzi. Definiti gli eventi $E_i =$ *"l'i-mo pezzo estratto è non difettoso"*, $i = 1, 2, 3$, stabilire se $E_1, E_2, E_3$ sono scambiabili e calcolare $P(E_i)$ e $P(E_i E_j)$, con $i \neq j$.
(*si indichi con $H$ l'evento "la scatola scelta a caso è quella che contiene il $25\%$ di pezzi difettosi"*)

$E_1,\ E_2,\ E_3\ \ scambiabili\,?$ $\qquad P(E_i) =$ $\qquad P(E_i E_j) =$

6. Un sistema è composto da due dispositivi in parallelo $A$ e $B$, con $B$ che entra in funzione nell'istante in cui si guasta $A$. I tempi di durata fino al guasto di $A$ e $B$ sono due numeri aleatori $X$ e $Y$ stocasticamente indipendenti e con distribuzione esponenziale di parametri rispettivamente $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Calcolare la probabilità condizionata $p$ che il sistema si guasti nell'intervallo $[0, 6]$, supposto che nell'istante $3$ il dispositivo $A$ sia ancora in funzione.

$$p =$$

7. Con riferimento all'esercizio precedente calcolare, per ogni $z > 0$, la funzione di sopravvivenza $S_Z(z)$ e la funzione di rischio $h_Z(z)$ del numero aleatorio $Z = X + Y$.

$S_Z(z) =$ $\qquad h_Z(z) =$

**Probabilità e Statistica** (Ing. Amb. Terr. - Latina)

*Soluzioni della prova scritta del 12/1/2007.*

1. Il sistema funziona se e solo se si verifica l'evento $A \wedge (B \vee C) \wedge D$; pertanto, osservando che $[A \wedge (B \vee C) \wedge D] \wedge (B \vee C) = A \wedge (B \vee C) \wedge D$ e che, per l'indipendenza stocastica di $A, B, C, D$ si ha $P[A \wedge (B \vee C) \wedge D] = P(A)P(B \vee C)P(D)$, segue
$$\alpha = P[A \wedge (B \vee C) \wedge D \mid B \vee C] = \frac{P[A \wedge (B \vee C) \wedge D]}{P(B \vee C)} =$$
$$= \frac{P(A)P(B \vee C)P(D)}{P(B \vee C)} = P(A)P(D) = p^2 = \frac{1}{2} \iff p = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$
Inoltre, osservando che $(B \vee C) \wedge B = B$, si ha
$$[A \wedge (B \vee C) \wedge D] \wedge B = A \wedge (B \vee C) \wedge B \wedge D = ABD\,;$$
pertanto
$$P[A \wedge (B \vee C) \wedge D \mid B] = \frac{P(ABD)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)P(D)}{P(B)} = p^2 = \alpha\,.$$
Con un ragionamento simile si ottiene : $P[A \wedge (B \vee C) \wedge D \mid C] = \cdots = p^2 = \alpha$.

2. Si ha $X = |A| + |B| + |C| + |D|$; essendo gli eventi indipendenti ed equiprobabili, $X$ ha una distribuzione binomiale di parametri $4, p$. Pertanto
$$P(X = h) = \binom{4}{h} p^h q^{4-h}\,,\ h = 0, 1, \ldots, 4;$$
Allora
$$\varphi(t) = \sum_{h=0}^{4} \binom{4}{h} p^h q^{4-h} e^{ith} = \cdots = \left(pe^{it} + q\right)^4\,.$$

3. Si ha
$$P(X \le x, Y \le y) = \int_0^x dt \int_0^y [t+u]\,du = \int_0^x \left[tu + \frac{u^2}{2}\right]_0^y dt =$$
$$= \int_0^x (ty + \frac{y^2}{2})\,dt = \left[y\frac{t^2}{2} + \frac{y^2}{2}t\right]_0^x = y\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}x = \frac{xy(x+y)}{2}\,;$$
$$P(X \le y, Y \le x) = \int_0^y dt \int_0^x [t+u]\,du = \int_0^y \left[tu + \frac{u^2}{2}\right]_0^x dt =$$
$$= \int_0^y (tx + \frac{x^2}{2})\,dt = \left[x\frac{t^2}{2} + \frac{x^2}{2}t\right]_0^y = x\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2}y = \frac{xy(y+x)}{2}\,.$$
Pertanto, l'uguaglianza è valida per ogni $(x, y) \in (0,1) \times (0,1)$.

4. Si ha $X \in [0,1]$ e quindi $F_1(x) = P(X \leq x) = 0$ per $x \leq 0$; inoltre $F_1(x) = 1$ per $x \geq 1$. Infine, osservando che $(X \leq x) = (X \leq x, 0 \leq Y \leq 1)$, per $0 < x < 1$ si ha

$$F_1(x) = \int_0^x dt \int_0^1 (t+y)\, dy = \int_0^x \left[ty + \frac{y^2}{2}\right] dt = \int_0^x (t + \frac{1}{2})\, dt = \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t}{2}\right]_0^x = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\,.$$

*Metodo alternativo :* $f_1(x) = \cdots = x + \frac{1}{2}$ *per* $x \in [0,1]$, *con* $f_1(x) = 0$ *altrove. Allora, per* $0 < x < 1$, *si ha :* $F_1(x) = \cdots = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}$.

5. Trattandosi di estrazioni con restituzione da un'urna di composizione incognita, gli eventi $E_1, E_2, E_3$ sono scambiabili. Inoltre, si ha

$$P(E_i) = P(E_i|H)P(H) + P(E_i|H^c)P(H^c)\,, \quad P(E_iE_j) = P(E_iE_j|H)P(H) + P(E_iE_j|H^c)P(H^c)\,,$$

con

$$P(H) = \frac{1}{8}\,,\ \ P(E_i|H) = \frac{3}{4}\,,\ P(E_i|H^c) = \frac{1}{2}\,,\ P(E_iE_j|H) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}\,,\ \ P(E_iE_j|H^c) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\,.$$

Pertanto

$$P(E_i) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{8} = \frac{17}{32}\,,\ i = 1,2,3; \quad P(E_iE_j) = \frac{9}{16}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\cdot\frac{7}{8} = \frac{37}{128}\,,\ i,j = 1,2,3,\ i \neq j\,.$$

6. Si ha $p = P(X+Y \leq 6 \,|\, X \geq 3) = \frac{P(X+Y \leq 6\,,\, X \geq 3)}{P(X \geq 3)}$, con $P(X \geq 3) = \int_3^{+\infty} e^{-x}\, dx = \cdots = e^{-3}$. Inoltre, tenendo conto che $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$, si ha

$$P(X+Y \leq 6\,,\, X \geq 3)) = \int_3^6 dx \int_0^{6-x} 2e^{-x-2y}\, dy = \int_3^6 e^{-x}(1 - e^{-2(6-x)})\, dx =$$

$$= \int_3^6 e^{-x}\, dx - \int_3^6 e^{x-12}\, dx = \cdots = e^{-3} - 2e^{-6} + e^{-9} = e^{-3}(1 - 2e^{-3} + e^{-6})\,.$$

Pertanto $p = \frac{e^{-3}(1-2e^{-3}+e^{-6})}{e^{-3}} = 1 - 2e^{-3} + e^{-6} = (1 - e^{-3})^2$.

7. Per ogni fissato $z > 0$, si ha $S_Z(z) = P(Z > z) = P(X+Y > z) = 1 - P(X+Y \leq z)$, con

$$P(X+Y \leq z) = \int_o^z dx \int_0^{z-x} 2e^{-x-2y}\, dy = \int_o^z e^{-x}(1 - e^{-2(z-x)})\, dx = ,$$

$$= \int_o^z e^{-x}\, dx - \int_o^z e^{x-2z}\, dx = \cdots = 1 - 2e^{-z} + e^{-2z}\,;$$

pertanto : $S_Z(z) = 2e^{-z} - e^{-2z}\,,\ z > 0$. Inoltre

$$h_Z(z) = \frac{-S'_Z(z)}{S_Z(z)} = \cdots = \frac{2e^{-z} - 2e^{-2z}}{2e^{-z} - e^{-2z}} = \frac{2 - 2e^{-z}}{2 - e^{-z}}\,,\ z > 0\,.$$