Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Latina* - 19/9/2007)

(il punteggio massimo si ottiene risolvendo correttamente 5 esercizi)

1. Date due urne, U_1 contenente 2 palline bianche e 4 nere e U_2 contenente 4 palline bianche e 2 nere, da una di esse si effettuano estrazioni con restituzione fino ad ottenere per la prima volta pallina bianca. L'urna è stata scelta in base all'esito del lancio di un dado: U_1 se il risultato del lancio è inferiore a 5 (evento H), U_2 altrimenti (evento H^c). Indicando con A l'evento *"la pallina bianca esce per la prima volta alla* 4^a *estrazione"*, calcolare la probabilità p dell'evento condizionato $H|A$. (*Suggerimento: utilizzare gli eventi* $E_i =$ *"nell'i−esima estrazione esce pallina nera"*, $i \geq 1$.)
   $p =$

2. In un ufficio aperto al pubblico ci sono tre sportelli, in cui vengono gestiti tre differenti tipi di pratiche. Siano X, Y, Z i numeri aleatori di clienti che si presentano in un fissato intervallo di tempo ai tre sportelli. Assumendo X, Y, Z stocasticamente indipendenti e con distribuzione di Poisson di parametri $\lambda_X = 2, \lambda_Y = 4, \lambda_Z = 3$ e definiti gli eventi $E = (X+Y+Z = 4)$, $H = (X+Y \leq 1)$, calcolare la probabilità p dell'evento condizionato $H|E$. (*N.B.: ricordiamo che un numero aleatorio, somma di numeri aleatori indipendenti e con distribuzioni di Poisson, ha ancora una distribuzione di Poisson.*)
   $p =$

3. La densità di probabilità di un numero aleatorio continuo $X \in [0, 4]$, è lineare crescente nell'intervallo $[0, 2]$ e lineare decrescente nell'intervallo $(2, 4]$, con $f(2) = \frac{1}{2}$ e con $f(x) = 0$ per ogni $x \notin (0, 4)$. Determinare la previsione di X e la funzione di ripartizione $F(x)$.

   $\mathbb{P}(X) =$ $\qquad$ $F(x) =$

4. Un albero di diametro aleatorio (in mm) X dev'essere inserito in un cuscinetto di diametro aleatorio Y. Assumendo X e Y stocasticamente indipendenti e con distribuzione normale di parametri $m_X = 12.50, \sigma_X = 0.02, m_Y = 12.58, \sigma_Y = 0.025$, determinare la densità di probabilità del gioco aleatorio $Z = Y - X$. Inoltre, calcolare la probabilità $p = P(Z < 0)$, ovvero la probabilità che vi sia interferenza tra albero e cuscinetto. (*N.B.:* $\Phi(2.5) \simeq 0.9938$)
   $f_Z(z) =$ $\qquad$ $p =$

5. Con riferimento all'esercizio precedente, determinare la funzione caratteristica di $\frac{Z-m_Z}{\sigma_Z}$.
   $\varphi_Z(t) =$

6. La pila di una radio ha un tempo di vita aleatorio X con densità $f(x) = \frac{k}{x^2}$ per $x > 10$, con $f(x) = 0$ altrove. Calcolare la costante k e la funzione di rischio di X.
   $k =$ $\qquad$ $h(x) =$

7. La densità iniziale di un parametro aleatorio Θ è $\beta(\theta) = 2e^{-2\theta}$ per $\theta > 0$, con $\beta(\theta) = 0$ altrove. Le componenti di un campione casuale $(X_1, \ldots, X_5)$ hanno, subordinatamente ad ogni fissato valore θ di Θ, una distribuzione esponenziale di parametro θ. Supposto di aver osservato un vettore $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_5)$, con $\sum_i x_i = 3$, calcolare la densità finale $\beta(\theta \,|\, \mathbf{x})$.
   $\beta(\theta \,|\, \mathbf{x}) =$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 19/9/2007.

1. Si ha $A = E_1E_2E_3E_4^c$; inoltre, essendo le estrazioni con restituzione, gli eventi $\{E_i\,,\, i \geq 1\}$ sono stocasticamente indipendenti e si ha

$$p = P(H\,|\,A) = P(H\,|\,E_1E_2E_3E_4^c) = \frac{P(E_1E_2E_3E_4^c\,|\,H)P(H)}{P(E_1E_2E_3E_4^c)}\,,$$

con

$$P(E_1E_2E_3E_4^c) = P(E_1E_2E_3E_4^c\,|\,H)P(H) + P(E_1E_2E_3E_4^c\,|\,H^c)P(H^c) =$$
$$= \left(\frac{4}{6}\right)^3 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} + \left(\frac{2}{6}\right)^3 \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{6}\,.$$

Pertanto: $p = P(H\,|\,A) = \cdots = \frac{8}{9}$.

2. Osserviamo che $X+Y+Z$ ha una distribuzione di Poisson con parametro pari alla sua previsione $\mathbb{P}(X+Y+Z) = 9$; analogamente $X+Y$ ha una distribuzione di Poisson di parametro 6. Inoltre

$$EH = (X+Y+Z = 4, X+Y \leq 1) = (Z = 4, X+Y = 0) \vee (Z = 3, X+Y = 1)\,;$$

quindi

$$P(EH) = P(Z=4, X+Y=0) + P(Z=3, X+Y=1) =$$
$$= P(Z=4)P(X+Y=0) + P(Z=3)P(X+Y=1) =$$
$$= \frac{3^4}{4!}\,e^{-3}e^{-6} + \frac{3^3}{3!}\,e^{-3}\frac{6^1}{1!}\,e^{-6} = (\frac{3^4}{4!} + 3^3)e^{-9}\,.$$

Pertanto

$$p = P(H|E) = \frac{P(EH)}{P(E)} = \frac{(\frac{3^4}{4!} + 3^3)e^{-9}}{\frac{9^4}{4!}e^{-9}} = \cdots = \frac{1}{9}\,.$$

3. Per $x \in [0,2]$ si ha $f(x) = ax$, $f(2) = \frac{1}{2} = 2a$; pertanto $a = \frac{1}{4}$. Per $x \in (2,4]$ si ha $f(x) = mx + q$, $f(4) = 4m + q = 0$; pertanto $q = -4m$. Inoltre

$$\int_0^4 f(x)dx = \int_0^2 \frac{1}{4}\,xdx + \int_2^4 m(x-4)dx = [\frac{x^2}{8}]_0^2 + m[\frac{x^2}{2} - 4x]_2^4 = \cdots = \frac{1}{2} - 2m = 1\,;$$

pertanto: $m = -\frac{1}{4}$, $q = 1$. Allora

$$\mathbb{P}(X) = \int_0^4 xf(x)dx = \int_0^2 \frac{1}{4}\,x^2dx + \int_2^4 -\frac{1}{4}\,x(x-4)dx = \cdots = 2\,.$$

Infine, $F(x) = 0$ per $x \leq 0$, $F(x) = 1$ per $x \geq 4$.

Per $x \in (0,2]$ si ha: $F(x) = \int_0^x \frac{1}{4} t dt = \cdots = \frac{x^2}{8}$.

Per $x \in (2,4)$ si ha: $F(x) = \frac{1}{2} + \int_2^x -\frac{1}{4}(t-4)dt = \cdots = -\frac{x^2}{8} + x - 1$.

4. Ricordiamo che un numero aleatorio Z, combinazione lineare di due numeri aleatori X, Y indipendenti e con distribuzione normale, ha una distribuzione ancora normale. Allora $Z \sim N_{m_Z, \sigma_Z}$, con

$$m_Z = \mathbb{P}(Y - X) = m_Y - m_X = 12.58 - 12.50 = 0.08\,,$$

$$\sigma_Z = \sqrt{Var(Y-X)} = \sqrt{Var(Y) + Var(X)} = \cdots \simeq 0.032\,.$$

Inoltre

$$p = P(Z < 0) = \Phi_{0.08, 0.032}(0) = \Phi\left(\frac{0 - 0.08}{0.032}\right) = \Phi(-2.5) = 1 - \Phi(2.5) \simeq 0.0062\,.$$

5. Ricordiamo che la funzione caratteristica di una distribuzione normale, con parametri m, σ è $\varphi(t) = e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$. Inoltre, $\frac{Z - m_Z}{\sigma_Z}$ ha una distribuzione normale standard. Pertanto

$$\varphi_Z(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}\,.$$

6. Dev'essere $\int_{10}^{+\infty} \frac{k}{x^2}\, dx = \cdots = \frac{k}{10} = 1$; pertanto: $k = 10$. Inoltre, per ogni $x > 10$, si ha $P(X > 10) = S(x) = \int_x^{+\infty} \frac{10}{t^2}\, dt = \cdots = \frac{10}{x}$, con $S(x) = 1$ altrove.
Allora $h(x) = \frac{f(x)}{S(x)} = \frac{1}{x}$, $x > 10$, con $h(x) = 0$ altrove.

7. Si ha:

$$\alpha(\mathbf{x} \,|\, \theta) = \theta e^{-\theta x_1} \cdots \theta e^{-\theta x_5} = \theta^5 e^{-\theta \sum_i x_i} = \theta^5 e^{-3\theta}\,.$$

Inoltre, per un'opportuna costante $k(\mathbf{x})$, si ha:

$$\beta(\theta \,|\, \mathbf{x}) = k(\mathbf{x})\beta(\theta)\alpha(\mathbf{x} \,|\, \theta) = 2k(\mathbf{x})\theta^5 e^{-5\theta}\,, \quad \theta > 0\,,$$

con $\beta(\theta \,|\, \mathbf{x}) = 0$ altrove.

Nota: $\beta(\theta \,|\, \mathbf{x})$ è una densità gamma di parametri $c = 6, \lambda = 5$; $2k(\mathbf{x}) = \frac{\lambda^c}{\Gamma(c)} = \frac{5^6}{5!} = \frac{5^5}{4!}$.