Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Latina* - 9/5/2007)

(il punteggio massimo si ottiene risolvendo correttamente 5 esercizi)

1. Da un'urna contenente 1 pallina bianca e 2 nere si effettuano 2 estrazioni con restituzione. Definiti gli eventi E_i = *"l'i-ma pallina estratta è bianca"*, $i = 1, 2$, sia $X = |E_1| + |E_2|$, $Y = |E_1| - |E_2|$. Calcolare il coefficiente di correlazione di X, Y.

   $\rho =$

2. Con riferimento al vettore aleatorio (X, Y) dell'esercizio precedente, calcolare per ogni punto possibile (x, y) la probabilità $p_{x,y} = P(X = x, Y = y)$. Inoltre, stabilire se X ed Y sono stocasticamente indipendenti.

   (x, y) :

   $p_{x,y}$:

   X, Y *stocast. indip.* ?

3. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione caratteristica $\varphi(t)$ del numero aleatorio $Z = (X + Y)(X - Y)$.

   $\varphi(t) =$

4. In un investimento economico il guadagno aleatorio Z è dato dalla differenza tra il ricavo aleatorio X e la perdita aleatoria Y, con una densità congiunta per il vettore aleatorio (X, Y) data da $f(x, y) = 3e^{-x-3y}$ per $x \geq 0, y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la probabilità p_z dell'evento $(Z > z)$ per un fissato valore $z \geq 0$.

   $p_z =$

5. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione di ripartizione $F_2(y)$ del numero aleatorio Y, per ogni $y > 0$, e la probabilità γ dell'evento $(Y > y + y_0 \,|\, Y > y_0)$, con $y > 0, y_0 > 0$.

   $F_2(y) =$ $\gamma =$

6. Un lotto di composizione incognita contiene 4 pezzi, dei quali al massimo 1 è difettoso. Definito l'evento H = *"il lotto non contiene pezzi difettosi"*, si assumano equiprobabili H e H^c. Dal lotto si effettuano 3 estrazioni con restituzione. Definiti gli eventi E_i = *"l'i-mo pezzo estratto è non difettoso"*, $i = 1, 2, 3$, verificare se $P(E_1E_2) = P(E_1E_3) = P(E_2E_3)$.

   $P(E_1E_2) = P(E_1E_3) = P(E_2E_3)$?

7. La distribuzione iniziale di un numero aleatorio Θ è normale con parametri $m_0 = 0$, $\sigma_0 = 5$. Le componenti di un campione casuale $(X_1, \cdots, X_n)$, subordinatamente ad ogni fissato valore θ di Θ, hanno una distribuzione normale con valor medio θ e scarto standard $\sigma = 1$. Supposto di aver osservato un campione casuale $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$, con $x_1 + \cdots + x_n = 0$, stabilire per quale valore θ_0 risulta $P(\Theta > \theta_0 \mid \mathbf{x}) = \Phi(2)$.

   $\theta_0 =$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 9/5/2007.

1. Gli eventi E_i sono equiprobabili e indipendenti, con $P(E_i) = \frac{1}{3}$; quindi

$$\mathbb{P}(X) = P(E_1) + P(E_2) = \frac{2}{3}\,, \quad \mathbb{P}(Y) = P(E_1) - P(E_2) = 0\,.$$

Inoltre

$$XY = (|E_1| + |E_2|)(|E_1| - |E_2|) = |E_1|^2 - |E_2|^2 = |E_1| - |E_2| = Y;$$

allora

$$\mathbb{P}(XY) = \mathbb{P}(Y) = 0\,.$$

Pertanto

$$Cov(X,Y) = \mathbb{P}(XY) - \mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y) = 0\,,$$

e quindi $\rho = 0$.

2. I costituenti relativi agli eventi E_1, E_2 sono $E_1E_2\,,\ E_1E_2^c\,,\ E_1^cE_2\,,\ E_1^cE_2^c$. I corrispondenti valori di (X,Y) sono $(2,0)\,,\ (1,1)\,,\ (1,-1)\,,\ (0,0)$, con

$$p_{2,0} = P(E_1E_2) = \frac{1}{9}\,,\ p_{1,1} = P(E_1E_2^c) = \frac{2}{9}\,,\ p_{1,-1} = P(E_1^cE_2) = \frac{2}{9}\,,\ p_{0,0} = P(E_1^cE_2^c) = \frac{4}{9}\,,$$

Inoltre, osservando ad esempio che

$$p_{2,0} = P(E_1E_2) = \frac{1}{9}\,,\quad P(X=2) = P(E_1E_2) = \frac{1}{9}\,,\quad P(Y=0) = P(E_1E_2) + P(E_1^cE_2^c) = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9}\,,$$

segue $P(X=2, Y=0) \neq P(X=2)P(Y=0)$.
Pertanto, X ed Y non sono stocasticamente indipendenti.

3. Si ha $(X+Y)(X-Y) = 2|E_1| \cdot 2|E_2| = 4|E_1E_2|$. Pertanto $Z \in \{0,4\}$, con

$$P(Z=4) = P(E_1E_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}\,,\quad P(Z=0) = 1 - P(Z=4) = \frac{8}{9}\,.$$

Pertanto

$$\varphi(t) = \mathbb{P}(e^{itZ}) = \frac{8}{9}e^0 + \frac{1}{9}e^{4it} = \frac{8}{9} + \frac{1}{9}e^{4it}\,.$$

4. Si ha

$$p_z = P(Z > z) = P(Y < X - z) = \int_z^{+\infty} dx \int_0^{x-z} 3e^{-x-3y} dy = \int_z^{+\infty} e^{-x}[1 - e^{-3(x-z)}]dx =$$

$$= \int_z^{+\infty} e^{-x}dx - \frac{e^{3z}}{4}\int_z^{+\infty} 4e^{-4x}dx = e^{-z} - \frac{e^{3z}}{4} \cdot e^{-4z} = \frac{3}{4}\,e^{-z}\,.$$

Nota: in particolare si ha $P(Z > 0) = \frac{3}{4}$.

5. Si ha
$$f_2(y) = \int_0^{+\infty} 3e^{-x-3y} dx = 3e^{-3y} \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 3e^{-3y}\,,\ y \geq 0\,,$$
con $f_2(y) = 0$ per $y < 0$. Pertanto
$$F_2(y) = \int_0^{y} 3e^{-3y} dy = \cdots = 1 - e^{-3y}\,,\ y > 0\,,$$
con $F_2(y) = 0$ per $y \leq 0$. Inoltre
$$\gamma = P(Y > y + y_0 \,|\, Y > y_0) = \frac{P(Y > y + y_0, Y > y_0)}{P(Y > y_0)} = \frac{P(Y > y + y_0)}{P(Y > y_0)} =$$
$$= \frac{S_2(y + y_0)}{S_2(y_0)} = \frac{1 - F_2(y + y_0)}{1 - F_2(y_0)} = \frac{e^{-3(y+y_0)}}{e^{-3y_0}} = e^{-3y} = P(Y > y)\,.$$
(*proprietà di assenza di memoria della distribuzione esponenziale*)

6. Si ha $P(H) = P(H^c) = \frac{1}{2}$; inoltre, osservando che (*per l'indipendenza subordinata*) per ogni $i \neq j$ risulta
$$P(E_iE_j|H) = P(E_i|H)P(E_j|H) = 1\,, \quad P(E_iE_j|H^c) = P(E_i|H^c)P(E_j|H^c) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}\,,$$
segue
$$P(E_iE_j) = P(H)P(E_iE_j|H) + P(H^c)P(E_iE_j|H^c) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{16} = \frac{25}{32}\,,\ i \neq j\,,\ i, j \in \{1, 2, 3\}\,.$$
Pertanto
$$P(E_1E_2) = P(E_1E_3) = P(E_2E_3) = \frac{25}{32}\,.$$

7. Si ha $\Theta \mid \mathbf{x} \sim N_{m_n,\sigma_n}$, con $m_n = 0$ in quanto $\overline{x} = m_0 = 0$. Inoltre
$$\frac{1}{\sigma_n^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2} = \frac{1}{25} + n = \frac{1 + 25n}{25}\,,$$
e quindi $\sigma_n = \frac{5}{\sqrt{1+25n}}$. Pertanto $\Theta \mid \mathbf{x} \sim N_{0,\frac{5}{\sqrt{1+25n}}}$. Allora
$$P(\Theta > \theta_0 \mid \mathbf{x}) = 1 - \Phi_{0,\frac{5}{\sqrt{1+25n}}}(\theta_0) = 1 - \Phi\left(\frac{\theta_0 - 0}{\frac{5}{\sqrt{1+25n}}}\right) = \Phi\left(-\frac{\sqrt{1+25n}}{5}\,\theta_0\right) =$$
$$= \Phi(2) \iff -\frac{\sqrt{1+25n}}{5}\,\theta_0 = 2 \iff \theta_0 = -2 \cdot \frac{5}{\sqrt{1+25n}} = -2\sigma_n\,.$$