Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Latina* - 21/12/2007)

(il punteggio massimo si ottiene risolvendo correttamente 5 esercizi)

1. Da un lotto contenente 6 pezzi (2 difettosi e 4 buoni) si effettuano 3 estrazioni senza restituzione. Definiti gli eventi $E_i =$ *"l'i-mo pezzo estratto è difettoso"*, $i = 1, 2, 3$, stabilire se E_1, E_2, E_3 sono: (i) logicamente indipendenti; (ii) stocasticamente indipendenti; (iii) scambiabili.

   logic. indip. ?   *stocast. indip.* ?   *scambiabili* ?

2. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la probabilità condizionata γ che esattamente due dei tre pezzi estratti siano buoni, supposto che almeno uno dei tre pezzi estratti sia difettoso.

   $\gamma =$

3. Con riferimento all'esercizio 1, determinare la funzione caratteristica del numero aleatorio X di pezzi difettosi fra i 3 estratti.

   $\varphi(t) =$

4. La funzione di rischio di un numero aleatorio continuo X non negativo è $h(x) = 2x$, per $x \geq 0$, con $h(x) = 0$ altrove. Determinare la previsione di X.

   $\mathbb{P}(X) =$

5. Un foro da eseguire con un trapano è accettabile se la sua distanza da una posizione assunta come origine di un sistema di riferimento cartesiano è al massimo $2\,mm$. Indicando con (X, Y) il punto aleatorio in cui viene effettivamente eseguito il foro, si assuma che i numeri aleatori X e Y siano stocasticamente indipendenti e con uguale distribuzione normale di parametri $m = 0, \sigma = \sqrt{2}$. Calcolare la probabilità p che il foro non sia accettabile.

   $p =$

6. Un vettore aleatorio (X, Y) ha una distribuzione uniforme sul cerchio $\mathcal{C}$ di centro l'origine e raggio 1. Definiti gli eventi $A = (X \leq 0)$, $B = (Y \leq 0)$, calcolare la funzione di ripartizione $F(z)$ del numero aleatorio $Z = |A| + |B|$.

   $$F(z) = \begin{cases} \quad , \\ \quad , \\ \quad , \\ \quad , \end{cases}$$

7. La distribuzione iniziale $\beta(\theta)$ di un parametro aleatorio Θ è esponenziale di parametro $\lambda_0 = 1$. Le componenti di un campione casuale $X = (X_1, \ldots, X_n)$, subordinatamente a ogni fissato valore θ, hanno una distribuzione gamma di parametri $c = 2$, $\lambda = \theta$. Calcolare la previsione di Θ condizionata ad un campione osservato $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

   $\mathbb{P}(\Theta \,|\, x) =$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 21/12/2007.

1. (i) si ha $E_1E_2E_3 = \emptyset$; pertanto E_1, E_2, E_3 non sono logicamente indipendenti;
(ii) osservando, ad esempio, che $P(E_1E_2) = \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5} \neq P(E_1)P(E_2) = \frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}$, si ha che E_1, E_2, E_3 non sono stocasticamente indipendenti;
(iii) gli eventi E_i relativi a estrazioni con o senza restituzione, da un'urna di composizione nota o incognita, sono scambiabili; pertanto E_1, E_2, E_3 sono scambiabili. Infatti, si può osservare che
$$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{2}{6}\,; \quad P(E_1E_2) = P(E_2E_3) = P(E_1E_3) = \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{15}\,.$$

2. Si ha
$$\gamma = P(E_1^cE_2^cE_3 \vee E_1^cE_2E_3^c \vee E_1E_2^cE_3^c \,|\, E_1 \vee E_2 \vee E_3) = \frac{P(E_1^cE_2^cE_3 \vee E_1^cE_2E_3^c \vee E_1E_2^cE_3^c)}{P(E_1 \vee E_2 \vee E_3)} =$$
$$= \frac{3P(E_1^cE_2^cE_3)}{1-P(E_1^cE_2^cE_3^c)} = \frac{3P(E_1^c)P(E_2^c\,|\,E_1^c)P(E_3\,|\,E_1^cE_2^c)}{1-P(E_1^c)P(E_2^c\,|\,E_1^c)P(E_3^c\,|\,E_1^cE_2^c)} = \frac{3\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}}{1-\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}} = \frac{3}{4}\,.$$

3. Si ha $X = |E_1| + |E_2| + |E_3| \in \{0, 1, 2\}$; inoltre, X ha una distribuzione ipergeometrica di parametri $N = 6, n = 3, p = \frac{1}{3}$. Allora, applicando la formula $P(X = h) = \frac{\binom{pN}{h}\binom{qN}{n-h}}{\binom{N}{n}}$, si ottiene
$$P(X=0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{4}{3}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{5}\,, \quad P(X=1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{4}{2}}{\binom{6}{3}} = \frac{3}{5}\,, \quad P(X=2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{4}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{5}\,.$$
Pertanto:
$$\varphi(t) = I\!P(e^{itX}) = \sum_h \frac{\binom{pN}{h}\binom{qN}{n-h}}{\binom{N}{n}}\,e^{ith} = \sum_{h=0}^{2} \frac{\binom{2}{h}\binom{4}{3-h}}{\binom{6}{3}}\,e^{ith} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}\,e^{it} + \frac{1}{5}\,e^{2it}\,.$$

4. Si ha
$$S(x) = e^{-\int_0^x h(t)dt} = e^{-x^2}\,, \quad x \geq 0\,;$$
quindi, per $x \geq 0$ si ha $f(x) = h(x)S(x) = 2x\,e^{-x^2}$, con $f(x) = 0$ altrove. Allora, osservando che la funzione $\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$ è una densità normale $N_{0,\frac{1}{\sqrt{2}}}(x)$ (di parametri $m = 0, \sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$), segue (indicando con $X_{0,\frac{1}{\sqrt{2}}}$ il numero aleatorio con tale densità)
$$I\!P(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int_0^{+\infty} 2x^2e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-x^2}dx =$$
$$= \sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 N_{0,\frac{1}{\sqrt{2}}}(x)dx = \sqrt{\pi}\,I\!P\left(X^2_{0,\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) = \sqrt{\pi}\,Var\left(X_{0,\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

Metodo alternativo (integrando per parti):

$$I\!P(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} 2x^2 e^{-x^2} dx = \left[-xe^{-x^2}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} N_{0,\frac{1}{\sqrt{2}}}(x) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

5. Si ha

$$f_1(u) = f_2(u) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\, e^{-\frac{u^2}{4}}\,, \quad \forall\, u\,.$$

Pertanto, la densità congiunta del vettore aleatorio (X, Y) è

$$f(x,y) = f_1(x) f_2(y) = \frac{1}{4\pi}\, e^{-\frac{x^2+y^2}{4}}\,, \quad \forall\,(x,y)\,.$$

Osserviamo che il foro non è accettabile se (X, Y) è esterno alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 4$; ovvero se risulta: $\sqrt{X^2+Y^2} > 2$. Allora, sfruttando il passaggio alle coordinate polari, $x = \rho\, cos\,\theta\,,\ y = \rho\, sin\,\theta$, e poi il cambiamento di variabile $t = \frac{\rho^2}{4}$, si ottiene

$$p = P(\sqrt{X^2+Y^2} > 2) = 1 - P(\sqrt{X^2+Y^2} \le 2) = 1 - \int_{-2}^{+2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{+\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{4\pi}\, e^{-\frac{x^2+y^2}{4}}\, dxdy =$$

$$= 1 - \int_0^{2\pi} \int_0^2 \frac{1}{4\pi}\, e^{-\frac{\rho^2}{4}}\, \rho\, d\rho d\theta = 1 - 2\pi \int_0^2 \frac{1}{4\pi}\, e^{-\frac{\rho^2}{4}}\, \rho\, d\rho = 1 - \int_0^2 \frac{\rho}{2}\, e^{-\frac{\rho^2}{4}}\, d\rho =$$

$$= 1 - \int_0^1 e^{-t}\, dt = 1 - (1 - e^{-1}) = e^{-1} \simeq 0.367879\,.$$

6. Si ha $f(x,y) = \frac{1}{\pi}$, per $(x,y) \in \mathcal{C}$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Inoltre, si ha $Z \in \{0,1,2\}$, con

$$P(Z=0) = P(A^c B^c) = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}\, dy = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}\,;$$

$$P(Z=2) = P(AB) = \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{1}{\pi}\, dy = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}\,;$$

$$P(Z=1) = 1 - P(Z=0) - P(Z=2) = \frac{1}{2}\,.$$

Pertanto $F(z) = 0$, per $z < 0$, $F(z) = \frac{1}{4}$, per $0 \le z < 1$, $F(z) = \frac{3}{4}$, per $1 \le z < 2$, $F(z) = 1$, per $z \ge 2$.

7. Si ha $\beta(\theta) = e^{-\theta}$ per $\theta \ge 0$, con $\beta(\theta) = 0$ altrove. Inoltre, ricordando che $G_{c,\lambda}(x) = \frac{\lambda^c}{\Gamma(c)} x^{c-1} e^{-\lambda x}$ per $x \ge 0$, con $G_{c,\lambda}(x) = 0$ altrove, per ogni $i = 1, \ldots, n$ si ha

$$f(x_i|\theta) = G_{2,\theta}(x_i) = \frac{\theta^2}{\Gamma(2)} x_i^{2-1} e^{-\theta x_i} = \theta^2 x_i e^{-\theta x_i}\,, \quad x_i \ge 0\,.$$

$$\alpha(x|\theta) = f(x_1|\theta) \cdots f(x_n|\theta) = \theta^2 x_1 e^{-\theta x_1} \cdots \theta^2 x_n e^{-\theta x_n} = x_1 \cdots x_n \theta^{2n} e^{-\theta \sum_i x_i}\,.$$

Allora

$$\beta(\theta|x) = k(x)\beta(\theta)\alpha(x|\theta) = k(x) e^{-\theta} x_1 \cdots x_n \theta^{2n} e^{-\theta \sum_i x_i} = k_1(x) \theta^{2n} e^{-(1+\sum_i x_i)\theta} = G_{c_n,\lambda_n}(\theta)\,,$$

con $c_n = 2n+1$, $\lambda_n = 1 + \sum_i x_i$; $k_1(x) = \frac{\lambda_n^{c_n}}{\Gamma(c_n)} = \frac{(1+\sum_i x_i)^{2n+1}}{(2n)!}$.

Pertanto

$$I\!P(\Theta \,|\, x) = \frac{c_n}{\lambda_n} = \frac{2n+1}{1 + \sum_i x_i}\,.$$