Calcolo delle probabilità (19/1/2008)

(Ing. Ambiente e Territorio - Roma)

1. Da un lotto contenente 5 pezzi (1 difettoso e 4 buoni) si effettuano 3 estrazioni senza restituzione. Definiti gli eventi $E_i =$ *"l'i-mo pezzo estratto è buono"*, $i = 1, 2, 3$, calcolare la probabilità (condizionata) α che nelle prime due estrazioni i pezzi siano entrambi buoni, supposto che uno dei tre pezzi estratti sia quello difettoso.

$$\alpha =$$

2. Con riferimento all'esercizio precedente, determinare la funzione di ripartizione del numero aleatorio X di pezzi buoni fra i 3 estratti.

$$F(x) = \begin{cases} & , \\ & , \\ & , \end{cases}$$

3. La densità congiunta di un vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = \frac{1}{4}\, e^{-\frac{1}{2}(x+y)}$, per $x \geq 0$, $y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Stabilire se X e Y sono stocasticamente indipendenti. Inoltre, posto $U = X + Y$, $V = X - Y$, calcolare il coefficiente di correlazione di U, V.

X, Y *stoc. indip.* ? $\qquad\qquad \rho_{UV} =$

Calcolo delle probabilità *(Ing. Amb. e Terr. - Roma)*
Soluzioni della prova scritta del 19/1/2008.

1. Si ha

$$\alpha = P(E_1E_2 \mid E_1^c \vee E_2^c \vee E_3^c) = \frac{P[E_1E_2 \wedge (E_1^c \vee E_2^c \vee E_3^c)]}{P(E_1^c \vee E_2^c \vee E_3^c)} =$$

$$= \frac{P(E_1E_2E_3^c)}{1 - P(E_1E_2E_3)} = \cdots = \frac{\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}}{1-\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\,.$$

2. Si ha $X = |E_1| + |E_2| + |E_3| \in \{2, 3\}$, con

$$P(X = 3) = P(E_1E_2E_3) = \cdots = \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{5}\,; \quad P(X = 2) = 1 - P(X = 3) = \frac{3}{5}\,.$$

Pertanto: $F(x) = 0$, per $x < 2$, $F(x) = \frac{3}{5}$, per $2 \leq x < 3$, $F(x) = 1$, per $x \geq 3$.

3. Si ha

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^{+\infty} \frac{1}{4}\,e^{-\frac{1}{2}(x+y)}\,dy = \frac{1}{2}\,e^{-\frac{1}{2}x}\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}\,e^{-\frac{1}{2}y}\,dy = \frac{1}{2}\,e^{-\frac{1}{2}x}\,,\ x \geq 0\,;$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{4}\,e^{-\frac{1}{2}(x+y)}\,dx = \frac{1}{2}\,e^{-\frac{1}{2}y}\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}\,e^{-\frac{1}{2}x}\,dx = \frac{1}{2}\,e^{-\frac{1}{2}y}\,,\ y \geq 0\,.$$

Inoltre: $f_1(x) = 0$, per $x < 0$; $f_2(y) = 0$, per $y < 0$. Allora: $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$, per ogni (x,y); pertanto X e Y sono stocasticamente indipendenti (con uguale distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = \frac{1}{2}$). Allora

$$Cov(U,V) = Cov(X-Y, X+Y) = \mathbb{P}[(X-Y)(X+Y)] - \mathbb{P}(X-Y)\mathbb{P}(X+Y) =$$

$$= \mathbb{P}(X^2-Y^2) - [\mathbb{P}(X)-\mathbb{P}(Y)][\mathbb{P}(X)+\mathbb{P}(Y)] = \mathbb{P}(X^2) - \mathbb{P}(Y^2) - [\mathbb{P}(X)]^2 - [\mathbb{P}(Y)]^2 =$$

$$= Var(X) - Var(Y) = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = 0\,.$$

Pertanto: $\rho_{UV} = 0$.

Metodo alternativo:

$$Cov(U,V) = Cov(X-Y, X+Y) =$$

$$= Cov(X,X) + Cov(X,Y) - Cov(Y,X) - Cov(Y,Y) = Var(X) - Var(Y) = 0\,;$$

quindi: $\rho_{UV} = 0$.