Calcolo delle probabilità (24/5/2008)

(Ing. Ambiente e Territorio - Roma)

1. La distribuzione di probabilità della quantità aleatoria X di pioggia (in cm) che cade in un anno in una data località è normale di parametri $m = 10$, $\sigma = 2$. Calcolare: (i) la probabilità $p = P(X > 12)$; (ii) la probabilità condizionata $\alpha = P(X > 10 \,|\, 8 < X \leq 12)$.

   $p =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\alpha =$

2. Siano dati due lotti L_1 ed L_2, contenenti ciascuno 1 componente difettoso e 3 buoni. Da L_1 si estraggono 2 componenti che vengono inseriti in L_2; successivamente, da L_2 si estrae a caso 1 componente. Definiti gli eventi E_1 = *"il primo componente estratto da L_1 è difettoso"*, E_2 = *"il secondo componente estratto da L_1 è difettoso"*, E_3 = *"il componente estratto da L_2 è difettoso"*, sia $X = |E_1| + |E_2|$; $Y = X + |E_3|$. Posto $p_{xy} = P(X = x, Y = y)$, calcolare per ogni coppia possibile (x, y) il valore p_{xy}.

   (x, y) : , , , ,
   p_{xy} : , , , ,

3. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare il coefficiente di correlazione di X, Y.

   $\rho =$

4. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è $f(x, y) = ax + by$, per $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, con $a \geq 0, b \geq 0$, $f(x, y) = 0$ altrove. Determinare: (i) la relazione che sussiste in generale tra a e b; (ii) i valori di a tali che $P(X > Y) > \frac{1}{2}$.

   (i) $\qquad\qquad\qquad$ *(ii)*

Calcolo delle probabilità *(Ing. Amb. e Terr. - Roma)*
Soluzioni della prova scritta del 24/5/2008.

1. Si ha

$$p = 1 - P(X \leq 12) = 1 - \Phi_{10,2}(12) = 1 - \Phi\left(\frac{12-10}{2}\right) = 1 - \Phi(1) \simeq 0.1587\,;$$

$$\alpha = P(X > 10 \,|\, 8 < X \leq 12) = \frac{P(X > 10, 8 < X \leq 12)}{P(8 \leq X \leq 12)} = \frac{P(10 < X \leq 12)}{P(8 < X \leq 12)} =$$

$$= \frac{\Phi_{10,2}(12) - \Phi_{10,2}(10)}{\Phi_{10,2}(12) - \Phi_{10,2}(8)} = \frac{\Phi(1) - \Phi(0)}{\Phi(1) - \Phi(-1)} = \frac{\Phi(1) - \frac{1}{2}}{2\,\Phi(1) - 1} = \frac{1}{2}\,.$$

2. Si ha $(X, Y) \in \{(0,0), (0,1), (1,1), (1,2)\}$, con

$$p_{00} = P(E_1^c E_2^c E_3^c) = P(E_1^c)P(E_2^c \,|\, E_1^c)P(E_3^c \,|\, E_1^c E_2^c) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{12}\,,$$

$$p_{01} = P(E_1^c E_2^c E_3) = P(E_1^c)P(E_2^c \,|\, E_1^c)P(E_3 \,|\, E_1^c E_2^c) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}\,,$$

$$p_{11} = P(E_1 E_2^c E_3^c) + P(E_1^c E_2 E_3^c) = \cdots = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot \frac{4}{6} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} = \frac{1}{3}\,,$$

$$p_{12} = P(E_1 E_2^c E_3) + P(E_1^c E_2 E_3) = \cdots = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot \frac{2}{6} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6}\,.$$

3. Si ha $X \in \{0,1\}$, $Y \in \{0,1,2\}$, $XY \in \{0,1,2\}$, con

$$P(X=0) = p_{00} + p_{01} = \frac{1}{2}\,, \quad P(X=1) = p_{11} + p_{12} = \frac{1}{2} = I\!\!P(X)\,;$$

$$P(Y=0) = p_{00} = \frac{5}{12}\,, \quad P(Y=1) = p_{01} + p_{11} = \frac{5}{12}\,, \quad P(Y=2) = p_{12} = \frac{1}{6}\,;$$

$$I\!\!P(Y) = 0 \cdot \frac{5}{12} + 1 \cdot \frac{5}{12} + 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{4}\,;$$

$$P(XY=0) = p_{00} + p_{01} = \frac{1}{2}\,, \quad P(XY=1) = p_{11} = \frac{1}{3}\,, \quad P(XY=2) = p_{12} = \frac{1}{6}\,;$$

$$I\!\!P(XY) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}\,; \quad Cov(X,Y) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{24}\,.$$

Inoltre

$$I\!\!P(X^2) = 0^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,, \quad Var(X) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\,,$$

$$I\!\!P(Y^2) = 0^2 \cdot \frac{5}{12} + 1^2 \cdot \frac{5}{12} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{13}{12}\,, \quad Var(Y) = \frac{13}{12} - \frac{9}{16} = \frac{25}{48}\,.$$

Pertanto: $\rho = \frac{\frac{7}{24}}{\sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{25}{48}}} = \frac{21}{\sqrt{675}} \simeq 0.8083$.

4. Si ha

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^1 (ax + by)dxdy = \cdots = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = 1\,;$$

pertanto, dev'essere: $a + b = 2$; quindi $f(x,y) = ax + (2-a)y$, con $0 \leq a \leq 2$. Inoltre

$$P(X > Y) = \int_0^1 \int_0^x f(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^x (ax + by)dxdy = \cdots = \frac{1}{3}(a + \frac{b}{2}) = \frac{1}{3}(1 + \frac{a}{2})\,,$$

e si ha: $\frac{1}{3}(1 + \frac{a}{2}) > \frac{1}{2} \iff 1 < a \leq 2$.