Calcolo delle probabilità (14/6/2008)

(Ing. Ambiente e Territorio - Roma)

1. Una moneta simmetrica viene lanciata 2 volte. Considerati gli eventi $E_1 =$ *"nel primo lancio esce Testa"*, $E_2 =$ *"nel secondo lancio esce Testa"*, $E_3 =$ *"nei due lanci esce sempre Testa oppure sempre Croce"*, verificare se: (i) E_1, E_2, E_3 sono a due a due indipendenti; (ii) E_1, E_2, E_3 sono indipendenti.

   Indipendenti a due a due? Indipendenti?

2. Dati due numeri aleatori X e Y, stocasticamente indipendenti e con distribuzione normale standard, si può dimostrare che, per ogni valore reale a, il numero aleatorio $Z = aX + Y$ ha una distribuzione normale. Determinare i valori di a tali che il coefficiente di correlazione ρ_{XZ} di X, Z sia maggiore di $\frac{1}{2}$.

   $a \in$

3. Con riferimento all'esercizio precedente, posto $a = 1$, calcolare la probabilità p dell'evento $(-\sqrt{5} \leq X + Z \leq \sqrt{5})$.

   $p =$

4. Un dispositivo d è stato prodotto da una macchina M_1 (ipotesi H) con probabilità α, oppure M_2 (ipotesi H^c) con probabilità $1 - \alpha$. Il dispositivo viene utilizzato ripetutamente ed ogni volta è soggetto a guastarsi casualmente con probabilità 0.02 (risp., 0.01) se è stato prodotto da M_1 (risp., M_2). Indicando con X il numero aleatorio di utilizzazioni del dispositivo d fino al primo guasto e supposto vero l'evento $E = (X > 10)$, calcolare i valori di α tali che $P(H \mid E) > \frac{3}{4}$; (*si noti che* $(\frac{98}{99})^{10} \simeq 0.9035$).

   $\alpha \in$

Calcolo delle probabilità *(Ing. Amb. e Terr. - Roma)*
Soluzioni della prova scritta del 14/6/2008.

1. Si ha
$$P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{2}\,,\; P(E_3) = P(E_1E_2) + P(E_1^cE_2^c) = \frac{1}{2}\,,$$
con $P(E_1E_2) = \frac{1}{4} = P(E_1)P(E_2)$; inoltre
$$P(E_1E_3) = P(E_1E_2) = \frac{1}{4} = P(E_1)P(E_3)\,,\; P(E_2E_3) = P(E_1E_2) = \frac{1}{4} = P(E_2)P(E_3)\,.$$
Pertanto, E_1, E_2, E_3 sono a due a due indipendenti. D'altra parte $E_1E_2E_3 = E_1E_2$ e quindi
$$P(E_1E_2E_3) = P(E_1E_2) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(E_1)P(E_2)P(E_3)\,;$$
pertanto, E_1, E_2, E_3 non sono indipendenti.

2. Si ha: $I\!P(X) = I\!P(Y) = 0$, $\sigma_X = \sigma_Y = 1$, $Cov(X,Y) = 0$; allora $Z \sim N_{m_Z,\sigma_Z}$, con
$$m_Z = I\!P(Z) = I\!P(aX+Y) = aI\!P(X)+I\!P(Y) = 0\,,\;\; \sigma_Z^2 = Var(Z) = a^2Var(X)+Var(Y) = a^2+1\,.$$
Pertanto
$$\rho_{XZ} = \frac{Cov(X,Z)}{\sigma_X\sigma_Z} = \frac{Cov(X,aX+Y)}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{aCov(X,X)+Cov(X,Y)}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} > \frac{1}{2} \Longleftrightarrow a > \frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

3. Ricordiamo che, dati due numeri aleatori X e Y, stocasticamente indipendenti e con distribuzione normale standard, si può dimostrare che, per ogni valore reale a, il numero aleatorio $Z = aX + Y$ ha una distribuzione normale (lo stesso risultato vale più in generale nel caso $Z = aX + bY$, con X e Y stocasticamente indipendenti e con distribuzione normale di parametri m, σ arbitrari, $\sigma > 0$). Allora, per $a = 1$, si ha $X + Z = 2X + Y$, con $I\!P(2X + Y) = 0$, $Var(2X + Y) = 5$; quindi $X + Z \sim N_{0,\sqrt{5}}$. Pertanto
$$p = P(-\sqrt{5} \leq X + Z \leq \sqrt{5}) = \Phi_{0,\sqrt{5}}(\sqrt{5}) - \Phi_{0,\sqrt{5}}(-\sqrt{5}) =$$
$$= \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 \simeq 0.6826\,.$$

4. Il numero aleatorio X condizionatamente ad H (risp., H^c) ha una distribuzione geometrica di parametro $p = 0.02$ (risp., $p = 0.01$) e, osservando che $P(X > n) = q^n = (1-p)^n$, segue
$$P(E\,|\,H) = P(X > 10\,|\,H) = 0.98^{10}\,,\quad P(E\,|\,H^c) = P(X > 10\,|\,H^c) = 0.99^{10}\,.$$
Allora
$$P(H\,|\,E) = \frac{P(E\,|\,H)P(H)}{P(E\,|\,H)P(H) + P(E\,|\,H^c)P(H^c)} = \frac{0.98^{10}\alpha}{0.98^{10}\alpha + 0.99^{10}(1-\alpha)} = \frac{98^{10}\alpha}{98^{10}\alpha + 99^{10}(1-\alpha)}\,.$$
Quindi
$$P(H\,|\,E) > \frac{3}{4} \Longleftrightarrow \alpha > \frac{3 \times 99^{10}}{3 \times 99^{10} + 98^{10}} = \frac{3}{3 + (\frac{98}{99})^{10}} \simeq \frac{3}{3 + 0.9035} \simeq 0.7685\,.$$