Calcolo delle probabilità (12/7/2008)

(Ing. Ambiente e Territorio - Roma)

1. Un sistema S è costituito da due dispositivi in parallelo d_1 e d_2, con d_2 che entra in funzione nell'istante in cui si guasta d_1. I tempi aleatori di durata dei due dispositivi sono due numeri aleatori X e Y, stocasticamente indipendenti e con uguale distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 1$. Fissato un valore positivo t, calcolare la probabilità p che il dispositivo d_1 si guasti dopo l'istante t, supposto che S si guasti dopo l'istante t.

   $p =$

2. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x-1)^2+y^2}{2}}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calcolare la probabilità p dell'evento $(X > 1, Y > 1)$.

   $p =$

3. Un vettore aleatorio discreto (X, Y) è uniformemente distribuito sull'insieme di punti $\mathcal{C} = \{(0, 0), (-2, -2), (-2, 2), (2, -2), (2, 2)\}$. Considerato il numero aleatorio $Z = 2X^2 - Y$, determinare: (i) il codominio C_Z di Z; (ii) la previsione m e la varianza σ^2 di Z; (iii) la probabilità condizionata $p = P(Z > 0 \,|\, Y \leq 0)$.

   $C_Z =$ $m =$ $\sigma^2 =$ $p =$

4. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione di ripartizione di X in un fissato valore $x \in [0, 2)$.

   $F_1(x) =$

Calcolo delle probabilità *(Ing. Amb. e Terr. - Roma)*
Soluzioni della prova scritta del 12/7/2008.

1. Si ha: $P(X > t) = \int_t^{+\infty} e^{-x} dx = e^{-t}$; inoltre

$$P(X+Y > t) = 1 - P(X+Y \leq t) = 1 - \int_0^t dx \int_0^{t-x} e^{-x-y} dy =$$

$$= 1 - \int_0^t e^{-x}(1 - e^{-t+x}) dx = 1 - \int_0^t e^{-x}\, dx + e^{-t} \int_0^t dx = 1 - (1 - e^{-t)} + te^{-t} = (1+t)e^{-t}\,.$$

Infine, osservando che $(X > t)$ implica $(X+Y > t)$ si ha

$$p = P(X > t \,|\, X+Y > t) = \frac{P(X > t, X+Y > t)}{P(X+Y > t)} = \frac{P(X > t)}{P(X+Y > t)} = \frac{e^{-t}}{(1+t)e^{-t}} = \frac{1}{1+t}\,.$$

2. Si ha

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x-1)^2+y^2}{2}}\, dy = \cdots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}\,, \quad \forall\, x\,,$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x-1)^2+y^2}{2}}\, dx = \cdots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\,, \quad \forall\, y\,,$$

con $f(x,y) = f_1(x) f_2(y)$ per ogni (x,y). Pertanto X ha una distribuzione normale di parametri $m_1 = 1, \sigma_1 = 1$, mentre Y ha una distribuzione normale standard; inoltre, X ed Y sono stocasticamente indipendenti. Allora

$$p = P(X > 1, Y > 1) = P(X > 1) P(Y > 1) = [1 - P(X \leq 1)][1 - P(Y \leq 1)] =$$

$$= [1 - \Phi(1-1)][1 - \Phi(1)] = [1 - \Phi(0)][1 - \Phi(1)] \;\simeq\; 0.5 \times (1 - 0.8413) \;=\; 0.07935\,.$$

3. Si ha: $C_Z = \{0, 6, 10\}$, con $P(Z = 0) = \frac{1}{5}$, $P(Z = 6) = P(Z = 10) = \frac{2}{5}$. Pertanto

$$m = 0 \cdot \frac{1}{5} + 6 \cdot \frac{2}{5} + 10 \cdot \frac{2}{5} = \frac{32}{5}\,; \quad I\!P(Z^2) = 0^2 \cdot \frac{1}{5} + 6^2 \cdot \frac{2}{5} + 10^2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{272}{5}\,; \quad \sigma^2 = \frac{272}{5} - \left(\frac{32}{5}\right)^2 = \frac{336}{25}\,.$$

Inoltre, posto $P(X = x, Y = y) = p(x,y)$, si ha

$$p = P(Z > 0 \,|\, Y \leq 0) = \frac{p(-2,-2) + p(2,-2)}{p(0,0) + p(-2,-2) + p(2,-2)} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{3}\,.$$

4. Si ha: $X \in \{-2, 0, 2\}$, con $P(X = 0) = \frac{1}{5}$, $P(X = -2) = P(X = 2) = \frac{2}{5}$; pertanto, per $0 \leq x < 2$, risulta: $F_1(x) = P(X \leq x) = P(X = -2) + P(X = 0) = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$.