Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Latina* - 12/9/2008)

(il punteggio massimo si ottiene risolvendo correttamente 5 esercizi)

1. Sia R il rettangolo $[0,2] \times [0,1]$. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X,Y) è $f(x,y) = kxy\,,\ (x,y) \in R$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Calcolare la costante k e la probabilità p dell'evento condizionato $(X+Y \leq 2)\,|\,(X > Y)$.

   $k =$ $\qquad\qquad$ $p =$

2. Un vettore aleatorio discreto (X,Y) ha una distribuzione uniforme sull'insieme di punti $\mathcal{C} = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(2,0),(2,1)\}$. Stabilire se i numeri aleatori X e Y sono stocasticamente indipendenti.

   Stocast. indip. ?

3. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione caratteristica $\varphi_Z(t)$ del numero aleatorio $Z = X + 2Y$.

   $\varphi_Z(t) =$

4. La densità di probabilità del tempo aleatorio T di durata fino al guasto di un dispositivo è di tipo Gamma, con parametri $c = 2, \lambda = 2$; ovvero $f(t) = 4te^{-2t}$, per $t \geq 0$, con $f(t) = 0$ altrove. Calcolare, per ogni $t \geq 0$, la funzione di rischio $h(t)$ di T.

   $h(t) =$

5. Da un lotto contenente 4 pezzi (1 difettoso e 3 buoni) si effettuano 3 estrazioni senza restituzione. Definiti gli eventi E_i = *"l'i-mo pezzo estratto è difettoso"*, $i = 1,2,3$, stabilire se E_1, E_2, E_3 sono: (i) logicamente indipendenti; (ii) stocasticamente indipendenti; (iii) scambiabili.

   logic. indip. ? $\qquad\qquad$ *stocast. indip.* ? $\qquad\qquad$ *scambiabili* ?

6. La distribuzione iniziale $\beta(\theta)$ di un parametro aleatorio Θ è di tipo Gamma, con parametri $c_0 = 2, \lambda_0 = 1$. Le componenti di un campione casuale $X = (X_1, \ldots, X_4)$, subordinatamente a ogni fissato valore θ, hanno una distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = \theta$. Calcolare la previsione di Θ condizionata ad un campione osservato $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (2,4,5,7)$.

   $\mathbb{P}(\Theta\,|\,x) =$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 12/9/2008.

1. Si ha

$$\int_0^2 \int_0^1 f(x,y)dxdy = 1 = k\int_0^2 \int_0^1 xydxdy = k\int_0^2 x\,\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 dx = \frac{k}{2}\int_0^2 x\,dx = \frac{k}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = k\,;$$

quindi: $k=1$. Inoltre: $p = P[(X+Y \le 2)\,|\,(X>Y)] = \frac{P(X+Y\le 2,\,X>Y)}{P(X>Y)}$, con

$$P(X>Y) = \int_0^1 dy\int_y^2 xy\,dx = \int_0^1 y\left[\frac{x^2}{2}\right]_y^2 dy = \int_0^1 y\left(2-\frac{1}{2}y^2\right)dy = \left[y^2-\frac{1}{6}y^3\right]_0^1 = \frac{5}{6}\,;$$

$$P(X+Y\le 2,\,X>Y) = \int_0^1 dy\int_y^{2-y} xy\,dx = \int_0^1 y\left[\frac{x^2}{2}\right]_y^{2-y} dy = \cdots = \int_0^1 (2y-2y^2)\,dy = \frac{1}{3}\,.$$

Pertanto: $p = P[(X+Y\le 2)\,|\,(X>Y)] = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{6}} = \frac{2}{5}$.

2. Si ha $P(X=x,Y=y) = \frac{1}{6}$, $\forall\,(x,y)\in\mathcal{C}$. Inoltre: $X\in\{0,1,2\}$, $Y\in\{0,1\}$, con

$$P(X=x) = \frac{1}{3},\ \forall\,x\in\{0,1,2\},\qquad P(Y=y)=\frac{1}{2},\ \forall\,y\in\{0,1\}\,.$$

Quindi: $P(X=x,Y=y) = \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = P(X=x)P(Y=y)$, $\forall\,(x,y)$. Pertanto X e Y sono stocasticamente indipendenti.

3. Si ha: $\varphi_X(t) = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}e^{it}+\frac{1}{3}e^{2it}$; inoltre $2Y\in\{0,2\}$, con $P(2Y=0)=P(2Y=2)=\frac{1}{2}$; quindi: $\varphi_{2Y}(t) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2it}$. Infine, essendo X e $2Y$ stocasticamente indipendenti, risulta $\varphi_Z(t) = \varphi_X(t)\cdot\varphi_{2Y}(t)$; pertanto

$$\varphi_Z(t) = \frac{1}{3}\left(1+e^{it}+e^{2it}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(1+e^{2it}\right) = \cdots = \frac{1}{6}\left(1+e^{it}+2e^{2it}+e^{3it}+e^{4it}\right)\,.$$

4. Per ogni $t\ge 0$ si ha

$$S(t) = P(T>t) = \int_t^{+\infty} f(x)dx = \int_t^{+\infty} 4xe^{-2x}\,dx =$$

$$= [-2xe^{-2x}]_t^{+\infty} + \int_t^{+\infty} 2e^{-2x}\,dx = 2te^{-2t}+e^{-2t} = (2t+1)e^{-2t}\,.$$

Allora, per ogni $t\ge 0$, si ha

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \frac{4te^{-2t}}{(2t+1)e^{-2t}} = \frac{4t}{2t+1}\,,$$

con $h(t)=0$ altrove.

5. (i) si ha $E_iE_j = \emptyset$, per ogni $i \neq j$; pertanto E_1, E_2, E_3 non sono logicamente indipendenti;

   (ii) osservando, ad esempio, che $P(E_1E_2) = 0 \neq P(E_1)P(E_2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$, si ha che E_1, E_2, E_3 non sono stocasticamente indipendenti;

   (iii) gli eventi E_i relativi a estrazioni con o senza restituzione, da un'urna di composizione nota o incognita, sono scambiabili; pertanto E_1, E_2, E_3 sono scambiabili. Infatti, si può osservare che

$$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) \quad (= \frac{1}{4})\,; \quad P(E_1E_2) = P(E_2E_3) = P(E_1E_3) \quad (= 0)\,.$$

6. Ricordando che $G_{c,\lambda}(x) = \frac{\lambda^c}{\Gamma(c)} x^{c-1} e^{-\lambda x}$ per $x \geq 0$, con $G_{c,\lambda}(x) = 0$ altrove, segue $\beta(\theta) = G_{c_0,\lambda_0}(\theta) = \frac{\lambda_0^{c_0}}{\Gamma(c_0)} \theta^{c_0-1} e^{-\lambda_0\theta} = \theta e^{-\theta}$ per $\theta \geq 0$, con $\beta(\theta) = 0$ altrove. Inoltre, per ogni $i = 1, 2, 3, 4$, si ha $f(x_i|\theta) = \theta e^{-\theta x_i}\,, \;\; x_i \geq 0$; quindi

$$\alpha(x|\theta) = f(x_1|\theta) \cdots f(x_4|\theta) = \theta e^{-\theta x_1} \theta e^{-\theta x_2} \theta e^{-\theta x_3} \theta e^{-\theta x_4} = \theta^4 e^{-18\,\theta}\,.$$

   Allora, la distribuzione finale è ancora di tipo Gamma e risulta

$$\beta(\theta|x) = k(x)\beta(\theta)\alpha(x|\theta) = k(x)\theta e^{-\theta}\theta^4 e^{-18\,\theta} = k(x)\theta^5 e^{-19\,\theta} = G_{c_4,\lambda_4}(\theta) = G_{6,19}(\theta)\,,$$

   con $k(x) = \frac{\lambda_4^{c_4}}{\Gamma(c_4)} = \frac{19^6}{5!}$; pertanto: $\mathbb{P}(\Theta \,|\, x) = \frac{c_4}{\lambda_4} = \frac{6}{19}$.