Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Latina* - 16/4/2008)

(il punteggio massimo si ottiene risolvendo correttamente 5 esercizi)

1. I valori possibili di un vettore aleatorio discreto (X, Y) sono: $(0,2), (1,2), (2,2), (0,3), (1,3)$, di probabilità rispettivamente: $\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}$. Calcolare il coefficiente di correlazione di X, Y.

   $\rho =$

2. Dato un numero aleatorio X con distribuzione uniforme nell'intervallo $[1, 3]$, calcolare, per ogni $y \in [0, 1]$, la funzione di ripartizione $G(y)$ del numero aleatorio $Y = \frac{X-1}{2}$.

   $G(y) =$

3. Un sistema S è costituito da due dispositivi in parallelo d_1, d_2, con d_2 che entra in funzione nell'istante in cui si guasta d_1. Analogamente, un sistema Σ è costituito da due dispositivi in parallelo d_3, d_4, con d_4 che entra in funzione nell'istante in cui si guasta d_3. Siano $T_1, \ldots, T_4$ i tempi aleatori di funzionamento dei 4 dispositivi. La densità congiunta di (T_1, T_2) è $f_{T_1T_2}(t_1, t_2) = \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2}$, per $t_1 \geq 0$, $t_2 \geq 0$. La densità congiunta di (T_3, T_4) è $f_{T_3T_4}(t_3, t_4) = \lambda^2 e^{-\lambda(t_3+t_4)}$, per $t_3 \geq 0$, $t_4 \geq 0$. Siano X e Y i tempi aleatori di funzionamento di S e Σ. Stabilire la condizione che devono soddisfare i parametri $\lambda_1, \lambda_2, \lambda$ affinchè S e Σ abbiano lo stesso tempo medio di funzionamento.

   $\lambda =$

4. Da un'urna U contenente 3 palline bianche e 1 nera si estrae a caso una pallina che viene inserita in un'urna V, contenente inizialmente 1 pallina bianca e 2 nere. Sia H l'evento *"la pallina estratta da U è bianca"*. Successivamente, da V si estraggono in blocco 2 palline. Sia E_0 l'evento *"le palline estratte da V sono entrambe nere"*. Posto $P(H|E_0) = r_1 P(H)$, $P(H^c|E_0) = r_2 P(H^c)$, calcolare r_1, r_2.

   $r_1 =$ $\qquad\qquad$ $r_2 =$

5. Con riferimento all'esercizio precedente, sia E_1 l'evento *"le palline estratte da V sono una bianca e l'altra nera"* ed E_2 l'evento *"le palline estratte da V sono entrambe bianche"*. Inoltre, siano X e Y i numeri di palline bianche rimaste, rispettivamente, nell'urna U e V al termine dell'esperimento. Calcolare per ogni valore possibile (x, y) del vettore aleatorio (X, Y) la probabilità $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$.

   (x, y) : , , , , ,
   $p(x, y)$: , , , , ,

6. La densità congiunta di un vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = e^{-x-y}$ per $x > 0, y > 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare, per ogni $z \in (0, 1)$, la funzione di rischio $h(z)$ del numero aleatorio $Z = \frac{Y}{X+Y}$.

   $h(z) =$

7. La distribuzione iniziale $\beta(\theta)$ di un parametro aleatorio $\Theta \in [0, 1]$ è di tipo beta di parametri $r_0 = s_0 = 1$. Le componenti di un campione casuale $X = (X_1, \ldots, X_4)$, subordinatamente a ogni fissato valore θ, hanno una distribuzione binomiale di parametri $1, \theta$. Avendo osservato un campione $x = (x_1, \ldots, x_4)$, con $\sum_i x_i = x_1 + \cdots + x_4 = 2$, calcolare la previsione di Θ condizionata ad x.

   $\mathbb{P}(\Theta \,|\, x) =$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 16/4/2008.

1. Si ha $X \in \{0,1,2\}\,,\ \ Y \in \{2,3\}\,,\ \ XY \in \{0,2,3,4\}$, con

$$P(X=0)=\frac{1}{4}\,,\ P(X=1)=\frac{5}{8}\,,\ P(X=2)=\frac{1}{8}\,;\quad P(Y=2)=\frac{3}{4}\,,\ P(Y=3)=\frac{1}{4}\,;$$

$$P(XY=0)=\frac{1}{4}\,,\ P(XY=2)=\frac{1}{2}\,,\ P(XY=3)=\frac{1}{8}\,,\ P(XY=4)=\frac{1}{8}\,.$$

Allora:
$\mathbb{P}(X)=0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{5}{8}+2\cdot\frac{1}{8}=\frac{7}{8}\,;\ \mathbb{P}(Y)=2\cdot\frac{3}{4}+3\cdot\frac{1}{4}=\frac{9}{4}\,;\ \mathbb{P}(XY)=0\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{8}+4\cdot\frac{1}{8}=\frac{15}{8}$;
quindi: $Cov(X,Y)=\mathbb{P}(XY)-\mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y)=\frac{15}{8}-\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{4}=-\frac{3}{32}$. Inoltre

$$\mathbb{P}(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{4}+1^2\cdot\frac{5}{8}+2^2\cdot\frac{1}{8}=\frac{9}{8}\,;\qquad \mathbb{P}(Y^2)=2^2\cdot\frac{3}{4}+3^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{21}{4}\,;$$

quindi: $\sigma_X^2=\frac{9}{8}-(\frac{7}{8})^2=\frac{23}{64}\,,\quad \sigma_Y^2=\frac{21}{4}-(\frac{9}{4})^2=\frac{3}{16}$. Pertanto

$$\rho=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{-\frac{3}{32}}{\sqrt{\frac{23}{64}\cdot\frac{3}{16}}}=-\sqrt{\frac{3}{23}}\ \simeq\ -0.3612\,.$$

2. Essendo $X\in[1,3]$, si ha $Y\in[0,1]$; pertanto $G(y)=0$ per $y\le 0$ e $G(y)=1$ per $y\ge 1$. Inoltre, fissato $y\in(0,1)$, si ha

$$G(y)=P(Y\le y)=P\left(\frac{X-1}{2}\le y\right)=P(X\le 2y+1)=\int_1^{2y+1}\frac{1}{2}\,dx=\frac{1}{2}\cdot(2y+1-1)=y\,.$$

In conclusione, Y ha una distribuzione uniforme sull'intervallo $[0,1]$.

Nota: osserviamo che, per ogni $x\in[1,3]$, risulta $F(x)=\frac{x-1}{2}$; quindi, $Y=\frac{X-1}{2}=F(X)$.

3. Si ha $X=T_1+T_2$, $Y=T_3+T_4$; inoltre per le distribuzioni marginali risulta

$$f_1(t_1)=\int_0^{+\infty}\lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 t_1-\lambda_2 t_2}\,dt_2=\cdots=\lambda_1 e^{-\lambda_1 t_1}\,,\ t_1\ge 0\,;\ \ f_2(t_2)=\cdots=\lambda_2 e^{-\lambda_2 t_2}\,,\ t_2\ge 0\,;$$

$$f_3(t_3)=\int_0^{+\infty}\lambda^2 e^{-\lambda(t_3+t_4)}\,dt_4=\cdots=\lambda e^{-\lambda t_3}\,,\ t_3\ge 0\,;\ \ f_4(t_4)=\cdots=\lambda e^{-\lambda t_4}\,,\ t_4\ge 0\,.$$

Allora: $\mathbb{P}(X)=\mathbb{P}(T_1)+\mathbb{P}(T_2)=\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\,,\ \mathbb{P}(Y)=\mathbb{P}(T_3)+\mathbb{P}(T_4)=\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}=\frac{2}{\lambda}$, e si ha $\mathbb{P}(X)=\mathbb{P}(Y)\iff\lambda=\frac{2}{\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}}$. In altri termini, S e Σ hanno lo stesso tempo medio di funzionamento se e solo se λ è la media armonica di λ_1,λ_2.
Nota: la media aritmetica è maggiore o uguale della media armonica; infatti, essendo $(\lambda_2-\lambda_1)^2\ge 0$, si ha $\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\ge\frac{2}{\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}}$.

4. Si ha: $P(H) = \frac{3}{4}$, $P(E_0|H) = \frac{\binom{2}{0}\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6}$, $P(E_0|H^c) = \frac{\binom{1}{0}\binom{3}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{2}$.
Allora: $P(H|E_0) = \frac{P(E_0 H)}{P(E_0)} = \frac{P(E_0|H)}{P(E_0|H)P(H)+P(E_0|H^c)P(H^c)} \cdot P(H)$;
pertanto: $r_1 = \frac{P(E_0|H)}{P(E_0|H)P(H)+P(E_0|H^c)P(H^c)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$.
In modo analogo: $r_2 = \frac{P(E_0|H^c)}{P(E_0|H)P(H)+P(E_0|H^c)P(H^c)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}} = 2$.

5. Tenendo conto che $H^c E_2 = \emptyset$, i casi possibili relativi alle due estrazioni da U e V sono: $C_1 = HE_0$, $C_2 = HE_1$, $C_3 = HE_2$, $C_4 = H^c E_0$, $C_5 = H^c E_1$. I corrispondenti valori per il vettore aleatorio (X, Y) sono: $(2,2)$, $(2,1)$, $(2,0)$, $(3,1)$, $(3,0)$. Posto $P(X = x, Y = y) = p(x, y)$, si ha:
$p(2,2) = P(C_1) = P(H)P(E_0|H) = \frac{3}{4} \cdot \frac{\binom{2}{0}\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{8}$,
$p(2,1) = P(C_2) = P(H)P(E_1|H) = \frac{3}{4} \cdot \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$,
$p(2,0) = P(C_3) = P(H)P(E_2|H) = \frac{3}{4} \cdot \frac{\binom{2}{2}\binom{2}{0}}{\binom{4}{2}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{8}$,
$p(3,1) = P(C_4) = P(H^c)P(E_0|H^c) = \frac{1}{4} \cdot \frac{\binom{1}{0}\binom{3}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$,
$p(3,0) = P(C_5) = P(H^c)P(E_1|H^c) = \frac{1}{4} \cdot \frac{\binom{1}{1}\binom{3}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

6. Fissato $z \in (0,1)$, si ha

$$S(z) = P(Z > z) = P[Y > z(X+Y)] = P\left(Y > \frac{z}{1-z}\,X\right) = \int_0^{+\infty} dx \int_{\frac{z}{1-z}x}^{+\infty} e^{-x-y} dy =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{-\frac{z}{1-z}x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{1-z}x} dx = (1-z)\int_0^{+\infty} \frac{1}{1-z} e^{-\frac{1}{1-z}x} dx = 1 - z\,; \quad z \in (0,1)\,.$$

Allora, indicando con $g(z)$ la densità di probabilità di Z, si ha: $g(z) = -S'(z) = 1$, per ogni $z \in (0,1)$; ovvero Z ha una distribuzione uniforme nell'intervallo $(0,1)$. Pertanto

$$h(z) = \frac{g(z)}{S(z)} = \frac{1}{1-z}\,; \quad z \in (0,1)\,.$$

7. Si ha

$$\beta(\theta) = \frac{\Gamma(r_0 + s_0)}{\Gamma(r_0)\Gamma(s_0)}\,\theta^{r_0-1}(1-\theta)^{s_0-1} = 1\,, \quad \theta \in [0,1]\,,$$

con $\beta(\theta) = 0$ altrove (ovvero, Θ ha una distribuzione iniziale uniforme in $[0,1]$). Inoltre $f(x_i|\theta) = \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}$, $i = 1, \ldots, 4$; quindi

$$\alpha(x|\theta) = \theta^{\sum_i x_i}(1-\theta)^{n-\sum_i x_i} = \theta^2(1-\theta)^2\,.$$

Allora

$$\beta(\theta|x) = k(x)\beta(\theta)\alpha(x|\theta) = k(x)\theta^2(1-\theta)^2\,, \quad \theta \in [0,1]\,,$$

con $\beta(\theta|x) = 0$ altrove. Quindi, la distribuzione finale di Θ è di tipo beta di parametri $r_4 = s_4 = 3$, con $k(x) = \frac{\Gamma(r_4+s_4)}{\Gamma(r_4)\Gamma(s_4)} = \frac{\Gamma(6)}{\Gamma(3)\Gamma(3)} = \frac{5!}{2!\,2!} = 30$. Pertanto: $\mathbb{P}(\Theta\,|\,x) = \frac{r_4}{r_4+s_4} = \frac{1}{2}$.