Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Latina* - 16/7/2008)

(il punteggio massimo si ottiene risolvendo correttamente 5 esercizi)

1. Un sistema S è costituito da due dispositivi in parallelo d_1 e d_2, con d_2 che entra in funzione nell'istante in cui si guasta d_1. I tempi aleatori di durata dei due dispositivi sono due numeri aleatori X e Y, stocasticamente indipendenti e con uguale distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 1$. Fissato un valore positivo t, calcolare la probabilità p che il sistema S si guasti dopo l'istante t, supposto che il dispositivo d_2 si guasti entro l'istante t.

   $p =$

2. Con riferimento all'esercizio precedente, si supponga che i dispositivi d_1 e d_2 funzionino in contemporanea. Calcolare, per ogni $t > 0$ la funzione di rischio $h_T(t)$ del tempo aleatorio T di durata fino al guasto del sistema S.

   $h_T(t) =$

3. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x-1)^2+(y-1)^2}{2}}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calcolare la probabilità p dell'evento $(X > 1, Y > 1)$.

   $p =$

4. Un vettore aleatorio discreto (X, Y) ha una distribuzione uniforme sull'insieme di punti $\mathcal{C} = \{(0, 0), (-2, -2), (-2, 2), (1, -1), (1, 1)\}$. Considerato il numero aleatorio $Z = 2X^2 - Y$, determinare: (i) il codominio C_Z di Z; (ii) la previsione m e la varianza σ^2 di Z; (iii) la probabilità condizionata $p = P(Z > 0 \,|\, Y \leq 0)$.

   $C_Z =$ $\qquad$ $m =$ $\qquad$ $\sigma^2 =$ $\qquad$ $p =$

5. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione di ripartizione di X in un fissato valore $x \in [0, 1)$.

   $F_1(x) =$

6. Con riferimento all'esercizio 4, calcolare la funzione caratteristica $\varphi(t)$ di Z.

   $\varphi(t) =$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 16/7/2008.

1. Si ha: $P(Y \leq t) = \int_0^t e^{-y} dy = 1 - e^{-t}$; inoltre, $f(x,y) = e^{-x-y}$ per $x \geq 0, y \geq 0$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Allora

$$P(Y \leq t, X+Y > t) = \int_0^t dy \int_{t-y}^{+\infty} e^{-x-y} dx = \int_0^t e^{-y}\, e^{-t+y} dy = \int_0^t e^{-t}\, dy = te^{-t}.$$

Pertanto

$$p = P(X+Y > t \,|\, Y \leq t) = \frac{P(Y \leq t, X+Y > t)}{P(Y \leq t)} = \frac{te^{-t}}{1-e^{-t}} = \frac{t}{e^t - 1}.$$

2. Si ha $T = max\{X, Y\}$, con $F_T(t) = P(T \leq t) = P(X \leq t)P(Y \leq t) = (1-e^{-t})^2$, per ogni $t > 0$. Allora $f_T(t) = F'_T(t) = \cdots = 2e^{-t}(1-e^{-t})$. Pertanto, per ogni $t > 0$, si ha

$$h_T(t) = \frac{f_T(t)}{S_T(t)} = \frac{2e^{-t}(1-e^{-t})}{1-(1-e^{-t})^2} = \cdots = \frac{2-2e^{-t}}{2-e^{-t}} = \frac{2e^t - 2}{2e^t - 1}.$$

3. Si ha

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x-1)^2+(y-1)^2}{2}}\, dy = \cdots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}, \quad \forall\, x,$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x-1)^2+(y-1)^2}{2}}\, dx = \cdots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-1)^2}{2}}, \quad \forall\, y,$$

con $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ per ogni (x,y). Pertanto X ed Y hanno una distribuzione normale di parametri $m_1 = m_2 = 1, \sigma_1 = \sigma_2 = 1$; inoltre, X ed Y sono stocasticamente indipendenti. Allora

$$p = P(X > 1, Y > 1) = P(X > 1)P(Y > 1) = [1 - P(X \leq 1)][1 - P(Y \leq 1)] =$$
$$= [1 - \Phi(1-1)][1 - \Phi(1-1)] = [1 - \Phi(0)][1 - \Phi(0)] \;=\; 0.5 \times 0.5 \;=\; 0.25.$$

4. Si ha: $C_Z = \{0, 1, 3, 6, 10\}$, con $P(Z = z) = \frac{1}{5}$, per ogni $z \in C_Z$. Pertanto

$$m = \frac{0+1+3+6+10}{5} = 4; \quad I\!\!P(Z^2) = \frac{0^2+1^2+3^2+6^2+10^2}{5} = \frac{146}{5}; \quad \sigma^2 = \frac{146}{5} - 4^2 = \frac{66}{5}.$$

Inoltre, posto $P(X = x, Y = y) = p(x,y)$, si ha

$$p = P(Z > 0 \,|\, Y \leq 0) = \frac{p(-2,-2) + p(1,-1)}{p(0,0) + p(-2,-2) + p(1,-1)} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{3}.$$

5. Si ha: $X \in \{-2, 0, 1\}$, con $P(X = 0) = \frac{1}{5}$, $P(X = -2) = P(X = 1) = \frac{2}{5}$; pertanto, per $0 \leq x < 1$, risulta: $F_1(x) = P(X \leq x) = P(X = -2) + P(X = 0) = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$.

6. Ricordando che $Z \in C_Z = \{0, 1, 3, 6, 10\}$, con $P(Z = z) = p_z = \frac{1}{5}$, per ogni $z \in C_Z$, si ha

$$\varphi(t) = I\!\!P(e^{itZ}) = \sum_{z \in C_Z} p_z e^{itz} = \frac{1}{5}(1 + e^{it} + e^{3it} + e^{6it} + 2e^{10it}).$$