Calcolo delle probabilità (11/7/2009)

(Ing. Ambiente e Territorio - Roma)

1. Utilizzando un'urna contenente 3 palline bianche e 2 nere si fanno due tipi di esperimenti: (a) estrazioni con restituzione; (b) estrazioni senza restituzione. Definiti gli eventi $A =$ *"la prima pallina estratta è bianca"*, $B =$ *"la seconda pallina estratta è bianca"*, stabilire in quale esperimento è maggiore la probabilità dell'evento condizionato $B|(A \vee B)$.

   esperimento n. ?

2. Sia T il triangolo di vertici i punti $(0,0),(2,0),(2,4)$. La densità congiunta di un vettore aleatorio (X,Y) è $f(x,y) = \frac{xy}{8}$, per $(x,y) \in T$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Definiti gli eventi $H = (X \geq 1)$, $E = (Y \geq X)$, calcolare la probabilità p dell'evento condizionato $E|H$.

   $p =$

3. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare lo scarto quadratico medio di X.

   $\sigma_X =$

4. Da un'urna di composizione incognita si deve estrarre una pallina; sulla composizione dell'urna ci sono due ipotesi possibili: $H =$ *"nell'urna ci sono 2 palline bianche e 4 nere"*; $H^c =$ *"nell'urna ci sono 4 palline bianche e 2 nere"*, con $P(H) = \frac{2}{3}$. Definito l'evento $E =$ *"la pallina estratta è bianca"*, calcolare il rapporto r tra la probabilità dell'evento condizionato $H|E$ e quella di $H^c|E$.

   $r =$

Calcolo delle probabilità *(Ing. Amb. e Terr. - Roma)*
Soluzioni della prova scritta del 11/7/2009.

1. Nel caso (a) si ha

$$P(B) = \frac{3}{5}\,,\quad P(A^cB^c) = P(A^c)P(B^c) = \frac{4}{25}\,,\quad P[B|(A \vee B)] = \frac{P(B)}{P(A \vee B)} = \frac{P(B)}{1 - P(A^cB^c)} = \frac{5}{7}\,.$$

Nel caso (b), osservando che $P(B^c|A^c) = \frac{1}{4}$, si ha

$$P(B) = \frac{3}{5}\,,\quad P(A^cB^c) = \frac{1}{10}\,,\quad P[B|(A \vee B)] = \frac{P(B)}{P(A \vee B)} = \frac{P(B)}{1 - P(A^cB^c)} = \frac{2}{3} < \frac{5}{7}\,.$$

Pertanto, la probabilità dell'evento condizionato $B|(A \vee B)$ è maggiore nel caso (a), in cui si effettuano estrazioni con restituzione (*tale risultato dipende dal fatto che $P(A \vee B)$ è minore nel caso (a)*).

2. La retta passante per i punti $(0,0),(2,4)$ ha equazione $y = 2x$. Allora

$$P(H) = \frac{1}{8}\int_1^2 dx \int_0^{2x} xydy = \frac{1}{9}\int_2^3 x^2dx = \cdots = \frac{15}{16}\,.$$

Inoltre

$$P(EH) = P(Y \geq X,\, X \geq 1) = \frac{1}{8}\int_1^2 dx \int_x^{2x} xydy = \frac{1}{16}\int_1^2 3x^3dx = \cdots = \frac{45}{64}\,;$$

pertanto: $P(E|H) = \frac{P(EH)}{P(H)} = \frac{3}{4}$.

3. Si ha $X \in [0,2]$, con $f_1(x) = \frac{1}{8}\int_0^{2x} xydy = \cdots = \frac{x^3}{4}\,,\quad x \in [0,2]$, con $f_1(x) = 0$ altrove. Allora

$$\mathbb{P}(X) = \int_0^2 xf_1(x)dx = \cdots = \frac{8}{5}\,;\quad \mathbb{P}(X^2) = \int_0^2 x^2f_1(x)dx = \cdots = \frac{8}{3}\,.$$

Pertanto: $Var(X) = \mathbb{P}(X^2) - [\mathbb{P}(X)]^2 = \frac{8}{75}$, da cui segue: $\sigma_X = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{2}{3}} \simeq 0.3266\,.$

4. Si ha

$$P(E|H) = \frac{1}{3}\,,\quad P(E|H^c) = \frac{2}{3}\,,\quad P(E) = P(H)P(E|H) + P(H^c)P(E|H^c) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{9}\,;$$

$$P(H|E) = \frac{P(E|H)P(H)}{P(E)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{2}\,;\quad P(H^c|E) = 1 - P(H|E) = \frac{1}{2}\,;$$

pertanto: $r = 1$.