**Calcolo delle probabilità** (11/9/2009)

*(Ing. Ambiente e Territorio - Roma)*

1. Siano date due urne $A$ e $B$, contenenti ciascuna $r+3$ palline. L'urna $A$ contiene $r$ palline bianche e 3 nere; l'urna $B$ contiene 3 palline bianche ed $r$ nere. Scelta a caso una delle due urne, da essa si estrae una pallina. Definito l'evento $H =$"*la pallina viene estratta da A*" e supposto di aver osservato l'evento $E =$ "*la pallina estratta è bianca*", calcolare (condizionatamente ad $E$) per quali valori di $r$ l'ipotesi $H$ risulta meno probabile dell'ipotesi $H^c$.

   $r =$

2. Sia $D$ il parallelogramma di vertici i punti $(2,0),(2,2),(0,4),(0,2)$. La densità congiunta di un vettore aleatorio $(X,Y)$ è $f(x,y) = \frac{3}{20}\,xy$, per $(x,y) \in D$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Calcolare la previsione di $X$.

   $\mathbb{P}(X) =$

3. Dato un numero aleatorio $X$ con distribuzione normale standard, sia $Y = 3X+2$. Calcolare la probabilità $p$ dell'evento condizionato $(Y \leq 2) \,|\, (-1 \leq Y \leq 8)$.

   $p =$

4. Da una scatola contenente 5 componenti, 2 difettosi e 3 buoni, si prelevano a caso 3 pezzi che servono per il funzionamento di un sistema. Il sistema utilizza in parallelo 2 di tali componenti, mentre il terzo è disposto in serie con gli altri due. Calcolare la probabilità $\alpha$ che il sistema possa funzionare (utilizzando i 3 componenti in tutti i modi possibili).
   (*Nota: si indichi con X il numero aleatorio di pezzi difettosi fra i 3 prelevati dalla scatola*)

   $\alpha =$

**Calcolo delle probabilità** *(Ing. Amb. e Terr. - Roma)*

*Soluzioni della prova scritta del 11/9/2009.*

1. Si ha
$$P(E|H) = \frac{r}{r+3}\,, \quad P(E|H^c) = \frac{3}{r+3}\,, \quad P(E) = \frac{r}{r+3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{r+3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,;$$
pertanto
$$P(H|E) = \frac{P(E|H)P(H)}{P(E)} = \frac{\frac{r}{r+3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{r}{r+3}\,; \quad P(H^c|E) = 1 - P(H|E) = \frac{3}{r+3}\,.$$
Allora
$$P(H|E) \; < \; P(H^c|E) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{r}{r+3} \; < \; \frac{3}{r+3} \quad \Longleftrightarrow \quad r = 0, 1, 2\,.$$

2. La retta passante per i punti $(0,2), (2,0)$ ha equazione $y = 2 - x$, mentre la retta passante per i punti $(0,4), (2,2)$ ha equazione $y = 4 - x$. Allora
$$f_1(x) = \int_{2-x}^{4-x} \frac{3}{20}\, xy dy = \cdots = \frac{3}{10}\,(3x - x^2)\,, \quad 0 \le x \le 2\,,$$
con $f_1(x) = 0$ altrove. Pertanto
$$\mathbb{P}(X) = \int_0^2 x f_1(x) dx = \frac{3}{10}\int_0^2 (3x^2 - x^3)dx = \cdots = \frac{3}{10}\left[x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \cdots = \frac{6}{5}\,.$$

3. Essendo $Y = 3X + 2$, l'evento condizionato $(Y \le 2)\,|\,(-1 \le Y \le 8)$ coincide con l'evento condizionato $(X \le 0)\,|\,(-1 \le X \le 2)$. Pertanto
$$p = P[(Y \le 2)\,|\,(-1 \le Y \le 8)] = P[(X \le 0)\,|\,(-1 \le X \le 2)] = \frac{P(-1 \le X \le 0)}{P(-1 \le X \le 2)} =$$
$$= \frac{\Phi(0) - \Phi(-1)}{\Phi(2) - \Phi(-1)} = \frac{\Phi(0) + \Phi(1) - 1}{\Phi(2) + \Phi(1) - 1} \simeq \frac{0.5 + 0.8413 - 1}{0.9772 + 0.8413 - 1} = \frac{0.3413}{0.8185} \simeq 0.417\,.$$

4. Si ha $X \sim H(5, 3, \frac{2}{5})$; allora
$$P(X = k) = \frac{\binom{2}{k}\binom{3}{3-k}}{\binom{5}{3}}\,, \quad k = 0, 1, 2.$$
Il sistema può funzionare se e solo se si verifica l'evento $(X \le 1)$; pertanto
$$\alpha = P(X \le 1) = 1 - P(X = 2) = 1 - \frac{\binom{2}{2}\binom{3}{1}}{\binom{5}{3}} = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}\,.$$