Calcolo delle probabilità (13/11/2009)

(Ing. Ambiente e Territorio - Roma)

1. Dati 3 eventi E_1, E_2, E_3, indipendenti ed equiprobabili, con $P(E_i) = p > 0$, calcolare: (i) la probabilità α dell'evento $A = (E_1 \vee E_2) \wedge E_3$; (ii) la probabilità β dell'evento condizionato $A|E_3$.

   $\alpha =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\beta =$

2. Un vettore aleatorio continuo (X, Y) ha una distribuzione uniforme sul triangolo T di vertici i punti $(0, 0), (2, 0), (0, 2)$. Posto $Z = X + Y$, calcolare la previsione μ e lo scarto quadratico medio σ di Z.

   $\mu =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\sigma =$

3. Con riferimento all'esercizio precedente, stabilire se X e Y sono stocasticamente indipendenti.

   Indip. stocastica ?

4. Un lotto L_1 contiene 3 pezzi buoni e 1 difettoso, mentre un lotto L_2 contiene 1 pezzo buono e 3 difettosi. Da uno dei due lotti si estraggono a caso 2 pezzi che vengono esaminati. Sia H l'evento *"i 2 pezzi sono estratti dal lotto L_1"* ed E l'evento *"i 2 pezzi esaminati risultano uno buono e uno difettoso"*. Assumendo $P(H) > P(H^c)$, stabilire se risulta: $P(H|E) > P(H^c|E)$.

   $P(H|E) > P(H^c|E)$?

Calcolo delle probabilità *(Ing. Amb. e Terr. - Roma)*
Soluzioni della prova scritta del 13/11/2009.

1. Si ha

$$\alpha = P(A) = P[(E_1 \vee E_2) \wedge E_3] = P(E_1E_3 \vee E_2E_3) = P(E_1E_3) + P(E_2E_3) - P(E_1E_2E_3) =$$
$$= P(E_1)P(E_3) + P(E_2)P(E_3) - P(E_1)P(E_2)P(E_3) = 2p^2 - p^3\,.$$

Inoltre, osservando che $AE_3 = [(E_1 \vee E_2) \wedge E_3] \wedge E_3 = A$, segue

$$\beta = P(A|E_3) = \frac{P(AE_3)}{P(E_3)} = \frac{P(A)}{P(E_3)} = \frac{2p^2 - p^3}{p} = 2p - p^2 = P(E_1 \vee E_2)\,.$$

2. Si ha $f(x,y) = \frac{1}{2}$ per $(x,y) \in T$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Inoltre $Z \in [0,2]$ e, per ogni $z \in (0,2)$, l'evento $(Z \leq z)$ è vero se e solo se $(X,Y) \in T_z$ dove T_z è il triangolo di vertici i punti $(0,0), (z,0), (0,z)$, di area $\frac{z^2}{2}$. Allora

$$P(Z \leq z) = G(z) = \int_0^z dx \int_0^{z-x} \frac{1}{2}\,dy = \int\int_{T_z} \frac{1}{2}\,dxdy = \frac{1}{2} \cdot \frac{z^2}{2} = \frac{z^2}{4}\,.$$

Pertanto, per ogni $z \in [0,2]$, risulta: $G'(z) = g(z) = \frac{z}{2}$, con $g(z) = 0$ altrove. Allora

$$\mu = \mathbb{P}(Z) = \int_0^2 zg(z)dz = \cdots = \frac{4}{3}\,; \quad \mathbb{P}(Z^2) = \int_0^2 z^2 g(z)dz = \cdots = 2\,;$$

pertanto

$$\sigma = \sqrt{\mathbb{P}(Z^2) - [\mathbb{P}(Z)]^2} = \cdots = \frac{\sqrt{2}}{3}\,.$$

3. Osservando che la retta passante per i punti $(2,0), (0,2)$ ha equazione: $x + y = 2$, segue

$$f_1(x) = \int_0^{2-x} \frac{1}{2}dy = 1 - \frac{x}{2}\,, \quad 0 \leq x \leq 2\,; \quad f_2(y) = \int_0^{2-y} \frac{1}{2}dx = 1 - \frac{y}{2}\,, \quad 0 \leq y \leq 2\,.$$

Allora $f(x,y) \neq f_1(x)f_2(y)$; pertanto X ed Y non sono stocasticamente indipendenti.

4. Si ha

$$P(E|H) = \frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{2}\,; \quad P(E|H^c) = \frac{\binom{1}{1}\binom{3}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{2}\,;$$

allora

$$P(E) = P(E|H)P(H) + P(E|H^c)P(H^c) = \frac{1}{2} \cdot p + \frac{1}{2} \cdot (1-p) = \frac{1}{2}\,.$$

Inoltre

$$P(H|E) = \frac{P(EH)}{P(E)} = \frac{P(E|H)P(H)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot P(H)}{\frac{1}{2}} = P(H)\,; \quad P(H^c|E) = 1 - P(H|E) = P(H^c)\,.$$

Pertanto: $P(H|E) > P(H^c|E)$.