**Calcolo delle probabilità** (10/1/2009)

*(Ing. Ambiente e Territorio - Roma)*

1. Fra 140 componenti dello stesso tipo, utili per l'assemblaggio di un dispositivo, soltanto 80 sono realmente buoni. Calcolare: $(i)$ la probabilità $\alpha$ che a seguito di un collaudo approfondito compiuto su 5 dei 140 componenti esattamente due di essi risultino difettosi; $(ii)$ la previsione $m$ del numero aleatorio $X$ di componenti difettosi osservati nei 5 collaudi.

   $\alpha =$ $\qquad\qquad\qquad$ $m =$

2. Un'apparecchiatura produce palline metalliche, di peso aleatorio $X$ (in grammi) con distribuzione di probabilità normale, di parametri $m, \sigma$. La probabilità che una pallina abbia un peso non inferiore a 28 grammi è valutata 0.2005. Assumendo $\sigma = 1,2$ calcolare il peso medio $m$ delle palline prodotte dall'apparecchiatura. (*Nota:* $\Phi(0,84) \simeq 0,7995$)

   $m =$

3. Stabilire per quale valore $a$, la funzione $f(x) = 0$ per $x < 0$, $f(x) = x/a$, per $x \in [0,2]$, $f(x) = 1/x^2$, per $x > 2$, è una densità di probabilità. Determinare inoltre la funzione di ripartizione di $X$.

   $a =$ $\qquad\qquad\qquad$ $F(x) = \begin{cases} \qquad\qquad\qquad , \\ \qquad\qquad\qquad , \\ \qquad\qquad\qquad , \end{cases}$

4. I tempi aleatori impiegati da due veicoli per percorrere un tratto di strada sono rispettivamente $X$ e $Y$. La densità congiunta del vettore $(X, Y)$ è $f(x, y) = \frac{1}{8}(x + y)$, per $(x, y) \in [0,2] \times [0,2]$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Stabilire se i due eventi $(X \leq Y)$ e $(X > Y)$ sono equiprobabili.

   $P(X \leq Y) = P(X > Y)\,?$

**Calcolo delle probabilità** *(Ing. Amb. e Terr. - Roma)*
*Soluzioni della prova scritta del 10/1/2009.*

1. Si ha $X \sim \mathbf{H}(N, n, p)$, con $N = 140$, $n = 5$, $p = \frac{60}{140} = \frac{3}{7}$, $X \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Pertanto

$$\alpha = P(X = 2) = \frac{\binom{60}{2}\binom{80}{3}}{\binom{140}{5}} \simeq 0,3488\,; \quad m = I\!P(X) = np = \frac{15}{7} \simeq 2,1429.$$

2. Per ipotesi $X \sim N_{m;1,2}$, con $P(X \geq 28) = 0,2005$. Considerando il n.a. standardizzato $Z = \frac{X-m}{1,2}$, si ha

$$P(X \geq 28) = P\left(\frac{X-m}{1,2} \geq \frac{28-m}{1,2}\right) = P\left(Z \geq \frac{28-m}{1,2}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{28-m}{1,2}\right) = 0,2005\,;$$

ovvero: $\Phi\left(\frac{28-m}{1,2}\right) = 0,7995$ e quindi $\frac{28-m}{1,2} \simeq 0,84$, da cui segue: $m \simeq 26,992$.

3. Dev'essere $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, ovvero

$$\int_0^2 \frac{x}{a}\,dx + \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \cdots = \frac{1}{a} + \frac{1}{2} = 1\,,$$

pertanto: $a = 4$. Allora, $F(x) = 0$ per $x < 0$; $F(x) = \int_0^x \frac{t}{4}\,dt = \frac{x^2}{8}$, per $x \in [0, 2]$; infine, per $x > 2$ si ha

$$F(x) = \int_0^2 \frac{t}{4}\,dt + \int_2^x \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{x}\,.$$

4. Sia $T$ il triangolo di vertici i punti $(0, 0), (0, 2), (2, 2)$. L'evento $(X \leq Y)$ si verifica se e solo se $(X, Y) \in T$. Pertanto

$$P(X \leq Y) = \int\int_T f(x,y)dxdy = \frac{1}{8}\int_0^2 dx \int_x^2 (x+y)dy = \cdots = \frac{1}{8}\int_0^2 (-\frac{3}{2}\,x^2+2x+2)dx = \cdots = \frac{1}{2}\,;$$

allora, essendo $P(X > Y) = 1 - P(X \leq Y) = \frac{1}{2}$, i due eventi sono equiprobabili.