Calcolo delle probabilità (7/2/2009)

(Ing. Ambiente e Territorio - Roma)

1. Sia X un numero aleatorio con distribuzione binomiale, di parametri $n = 3, p = \frac{1}{5}$. Calcolare la previsione μ del numero aleatorio $Y = \frac{1}{2}(1 - X)^2$.

   $\mu =$

2. Siano dati due numeri aleatori stocasticamente indipendenti, X con distribuzione normale standard, Y con distribuzione normale di parametri $m = \sigma = 1$. Calcolare la probabilità p dell'evento $(-1 \leq X \leq 2\,,\ -1 \leq Y \leq 2)$.
   (*Nota:* $\Phi(1) \simeq 0,8413$; $\Phi(2) \simeq 0,9772$)

   $p =$

3. La densità di probabilità di un numero aleatorio X è $f(x) = 0$, per $x < 0$; $f(x) = x$, per $x \in [0, 1]$; $f(x) = 1/x^3$, per $x > 1$. Indicando con m la previsione di X, stabilire se vale $P(X > m) < P(X \leq m)$.

   $P(X > m) \ < \ P(X \leq m)$?

4. Tizio e Caio effettuano 2 lanci ciascuno con un dado giudicato non truccato. Definiti gli eventi $A =$ "*Tizio ottiene sempre risultato pari, oppure sempre dispari* ", $B =$ "*Caio ottiene sempre un risultato minore di 3, oppure sempre maggiore o uguale a 3*", calcolare le probabilità condizionate $\alpha = P(A \,|\, A \vee B)\,,\ \beta = P(B \,|\, A \vee B)$.

   $\alpha =$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\beta =$

Calcolo delle probabilità *(Ing. Amb. e Terr. - Roma)*
Soluzioni della prova scritta del 7/2/2009.

1. Si ha $X \in \{0, 1, 2, 3\}$; quindi $Y \in \{0, \frac{1}{2}, 2\}$, con

$$P(Y=0) = P(X=1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{5}\right)^1\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{48}{125};$$

$$P(Y=2) = P(X=3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^0 = \frac{1}{125}; \qquad P\left(Y=\frac{1}{2}\right) = 1-P(Y=0)-P(Y=2) = \frac{76}{125}.$$

Pertanto

$$\mu = \mathbb{P}(Y) = 0 \cdot \frac{48}{125} + \frac{1}{2} \cdot \frac{76}{125} + 2 \cdot \frac{1}{125} = \frac{8}{25} = 0,32.$$

2. Si ha

$$P(-1 \le X \le 2) = \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) - 1 + \Phi(1) \simeq 0,9772 - 1 + 0,8413 = 0,8185,$$

$$P(-1 \le Y \le 2) = \Phi_{1,1}(2) - \Phi_{1,1}(-1) = \Phi(2-1) - \Phi(-1-1) = \Phi(1) - \Phi(-2) = \Phi(1) - 1 + \Phi(2) \simeq 0,8185.$$

Pertanto

$$P(-1 \le X \le 2,\ -1 \le Y \le 2) = P(-1 \le X \le 2)P(-1 \le Y \le 2) \simeq 0,8185^2 \simeq 0.6699.$$

3. Si ha

$$m = \mathbb{P}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3};$$

quindi

$$P(X > m) = P(X > \frac{4}{3}) = \int_{\frac{4}{3}}^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_{\frac{4}{3}}^{+\infty} = \frac{9}{32},$$

con $P(X \le m) = 1 - P(X > m) = \frac{23}{32}$. Pertanto: $P(X > m) \ < \ P(X \le m)$.

4. Si ha: $P(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$, $P(B) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$; inoltre, A e B sono stocasticamente indipendenti, con

$$P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = \frac{1}{2} + \frac{5}{9} - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} = \frac{7}{9}.$$

Allora, osservando che $A \wedge (A \vee B) = A \vee AB = A$, $B \wedge (A \vee B) = AB \vee B = B$, segue

$$\alpha = P(A \,|\, A \vee B) = \frac{P(A)}{P(A \vee B)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{9}} = \frac{9}{14}; \qquad \beta = P(B \,|\, A \vee B) = \frac{P(B)}{P(A \vee B)} = \frac{\frac{5}{9}}{\frac{7}{9}} = \frac{5}{7}.$$