Calcolo delle probabilità (16/5/2009)

(Ing. Ambiente e Territorio - Roma)

1. La densità di probabilità di un numero aleatorio X è $f(x) = \frac{x-1}{2}$, per $x \in [1,2]$, $f(x) = \frac{1}{2}$, per $x \in (2, \frac{7}{2}]$, $f(x) = 0$ altrove. Calcolare il valore x_0 tale che $P(X > x_0) = P(X \leq x_0)$.

   $x_0 =$

2. Un'apparecchiatura M produce componenti di un certo tipo, ognuno dei quali ha probabilità $\frac{1}{5}$ di essere difettoso, indipendentemente dagli altri componenti. Un sistema S funziona utilizzando in serie 2 componenti. Supposto di avere a disposizione un lotto L di 3 componenti prodotti da M, calcolare: (i) la probabilità α che il sistema possa funzionare; (ii) la probabilità β che il sistema possa funzionare, supposto che almeno uno dei 3 componenti del lotto L sia guasto.
   (*Nota: si indichi con X il numero aleatorio di componenti difettosi contenuti nel lotto L*)

   $\alpha =$ $\qquad\qquad$ $\beta =$

3. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è $f(x, y) = \frac{x+y}{3}$, per $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 2]$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Determinare il valore della costante c, con $c > 0$, tale che $P(Y \leq cX) = P(Y > cX)$.

   $c =$

4. La densità di probabilità di un numero aleatorio X è $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{8}}$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Calcolare la probabilità p dell'evento condizionato $(X > 2 \mid -2 \leq X \leq 4)$.

   $p =$

Calcolo delle probabilità *(Ing. Amb. e Terr. - Roma)*

Soluzioni della prova scritta del 16/5/2009.

1. Essendo $P(X \le x_0) + P(X > x_0) = 1$, dev'essere $P(X \le x_0) = P(X > x_0) = \frac{1}{2}$. Allora, osservando che
$$\int_1^2 \frac{x-1}{2}\, dx = \frac{1}{4}\,,$$
segue $x_0 > 2$. Inoltre, per $x \in (2, \frac{7}{2}]$, si ha
$$P(X > x) = \int_x^{\frac{7}{2}} \frac{1}{2}\, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{2} - x\right)\ ;$$
pertanto: $\frac{1}{2}\left(\frac{7}{2} - x_0\right) = \frac{1}{2}$, da cui segue: $x_0 = \frac{7}{2} - 1 = \frac{5}{2}$.

2. Si ha $X \sim B(3, \frac{1}{5})$ e quindi
$$P(X = k) = \binom{3}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{3-k}\ , \quad k = 0, 1, 2, 3;$$
pertanto
$$\alpha = P(X \le 1) = \left(\frac{4}{5}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{112}{125} = 0.896\,.$$
$$\beta = P(X \le 1 \,|\, X \ge 1) = \frac{P(X = 1)}{1 - P(X = 0)} = \frac{3\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^2}{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^3} = \frac{48}{61} \simeq 0.7869\,.$$

3. Si ha $P(Y \le cX) + P(Y > cX) = 1$; pertanto $P(Y \le cX) = P(Y > cX) = \frac{1}{2}$. Inoltre, per $c \in [0, 2]$
$$P(Y \le cX) = \int_0^1 dx \int_0^{cx} \frac{x+y}{3}\, dy = \cdots = \frac{c^2 + 2c}{18} \le \frac{4}{9}\,.$$
Pertanto $c > 2$ e si ha
$$P(Y > cX) = \int_0^{\frac{2}{c}} dx \int_{cx}^2 \frac{x+y}{3}\, dy = \cdots = \frac{16c + 8}{18c^2}\,,$$
da cui, imponendo la condizione $\frac{16c+8}{18c^2} = \frac{1}{2}$, segue $c \simeq 2.1847$.

4. Ricordiamo che la densità di probabilità di una distribuzione di tipo normale è $N_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$; pertanto X ha una distribuzione normale di parametri $m = 0, \sigma = 2$. Allora, osservando che $\Phi_{m,\sigma}(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right), \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, $\Phi(1) \simeq 0.8413$, $\Phi(2) \simeq 0.9772$, segue
$$p = P(X > 2 \mid -2 \le X \le 4) = \frac{P(2 < X \le 4)}{P(-2 \le X \le 4)} = \frac{\Phi_{0,2}(4) - \Phi_{0,2}(2)}{\Phi_{0,2}(4) - \Phi_{0,2}(-2)} =$$
$$= \frac{\Phi(2) - \Phi(1)}{\Phi(2) - \Phi(-1)} = \frac{\Phi(2) - \Phi(1)}{\Phi(2) - 1 + \Phi(1)} \simeq \frac{0.9772 - 0.8413}{0.9772 - 1 + 0.8413} \simeq 0.166\,.$$