Calcolo delle probabilità (13/6/2009)

(Ing. Ambiente e Territorio - Roma)

1. Da una scatola contenente 15 componenti, 3 difettosi e 12 buoni, si prelevano a caso 4 pezzi che servono per il funzionamento di un sistema S che utilizza in serie 2 di tali componenti. Calcolare: (i) la probabilità α che il sistema possa funzionare; (ii) la probabilità β che il sistema possa funzionare, supposto che almeno due dei 4 componenti siano guasti.
   (*Nota: si indichi con X il numero aleatorio di pezzi difettosi fra i 4 prelevati dalla scatola*)

   $\alpha =$ $\beta =$

2. La densità di probabilità di un numero aleatorio X è $f(x) = \frac{1}{2}$, per $x \in [0,1]$, $f(x) = -\frac{x}{4} + \frac{3}{4}$, per $x \in (1,3]$, $f(x) = 0$ altrove. Calcolare l'insieme I dei valori x_0 tali che $P(X > x_0) > P(X \leq x_0)$.

   $I =$

3. Dato un cerchio di raggio r e centro nell'origine degli assi, si indichi con D la parte contenuta nel primo quadrante. Un vettore aleatorio continuo (X, Y) ha una distribuzione uniforme su D. Calcolare le probabilità $\alpha = P(X+Y \leq r)$, $\beta = P[(Y \leq X)|(X+Y \leq r)]$.

   $\alpha =$ $\beta =$

4. Da un'urna contenente N palline, delle quali pN bianche e qN nere, si effettuano 3 estrazioni con restituzione. Sia E_i = *"l'i-ma pallina estratta è bianca"*, $i = 1, 2, 3$; $X = |E_1| + |E_2|$, $Y = |E_1| + |E_3|$. Calcolare il coefficiente di correlazione di X, Y.

   $\rho =$

Calcolo delle probabilità *(Ing. Amb. e Terr. - Roma)*
Soluzioni della prova scritta del 13/6/2009.

1. Si ha $X \sim H(15, 4, \frac{1}{5})$ e quindi
$$P(X = k) = \frac{\binom{3}{k}\binom{12}{4-k}}{\binom{15}{4}}\,, \quad k = 0, 1, 2, 3;$$
pertanto
$$\alpha = P(X \leq 2) = \frac{\binom{3}{0}\binom{12}{4}}{\binom{15}{4}} + \frac{\binom{3}{1}\binom{12}{3}}{\binom{15}{4}} + \frac{\binom{3}{2}\binom{12}{2}}{\binom{15}{4}} = \frac{451}{455} \simeq 0.9912\,.$$
$$\beta = P(X \leq 2 \,|\, X \geq 2) = \frac{P(X = 2)}{P(X = 2) + P(X = 3)} = \frac{\binom{3}{2}\binom{12}{2}}{\binom{3}{2}\binom{12}{2} + \binom{3}{3}\binom{12}{1}} = \frac{33}{35} \simeq 0.9429\,.$$

2. Essendo $P(X \leq x_0) + P(X > x_0) = 1$, dev'essere $P(X \leq x_0) \leq \frac{1}{2}$. Allora, osservando che
$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}\,,$$
dev'essere: $x_0 \leq 1$; pertanto $I = (-\infty, 1]$.

3. L'area di D è $\frac{\pi r^2}{4}$; pertanto $f(x, y) = \frac{1}{\mu(D)} = \frac{4}{\pi r^2}$, per $(x, y) \in D$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Inoltre, si ha $(X+Y \leq r) = [(X, Y) \in T]$, dove T è il triangolo di vertici $(0, 0), (r, 0), (0, r)$; pertanto
$$\alpha = \int\int_T f(x, y)dxdy = \frac{1}{\mu(D)}\int\int_T dxdy = \frac{\mu(T)}{\mu(D)} = \frac{\frac{r^2}{2}}{\frac{\pi r^2}{4}} = \frac{2}{\pi}\,.$$
Infine, osservando che $(Y \leq X) \wedge (X + Y \leq r) = [(X, Y) \in \Gamma]$, dove Γ è il triangolo di vertici $(0, 0), (r, 0), (\frac{r}{2}, \frac{r}{2})$, si ha
$$\beta = \frac{P[(Y \leq X) \wedge (X + Y \leq r)]}{P(X + Y \leq r)} = \frac{\int\int_\Gamma f(x, y)dxdy}{\int\int_T f(x, y)dxdy} = \frac{\int\int_\Gamma dxdy}{\int\int_T dxdy} = \frac{\mu(\Gamma)}{\mu(T)} = \frac{\frac{r^2}{4}}{\frac{r^2}{2}} = \frac{1}{2}\,.$$

4. Osservando che $Cov(|E_i|, |E_j|) = 0$ per $i \neq j$, segue
$$Cov(X, Y) = Cov(|E_1| + |E_2|, |E_1| + |E_3|) = Cov(|E_1|, |E_1|) + Cov(|E_1|, |E_3|) +$$
$$+ Cov(|E_2|, |E_1|) + Cov(|E_2|, |E_3|) = Cov(|E_1|, |E_1|) = Var(|E_1|) = pq\,;$$
inoltre $Var(X) = Var(Y) = 2pq$. Pertanto
$$\rho = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{pq}{2pq} = \frac{1}{2}\,.$$