Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Latina* - 13/2/2009)
(il punteggio massimo si ottiene risolvendo correttamente 5 esercizi)

1. Tizio e Caio effettuano ognuno 3 estrazioni in blocco da due urne distinte, U contenente 2 palline bianche e 2 nere e V contenente 4 palline bianche e 4 nere. Siano, rispettivamente, X il numero aleatorio di palline bianche estratte da U e Y il numero aleatorio di palline bianche estratte da V. Calcolare le due differenze $\delta = \mathbb{P}(Y) - \mathbb{P}(X)$ e $\gamma = var(Y) - var(X)$.

   $\delta =$ $\gamma =$

2. Dati due cerchi $\mathcal{C}$ e Γ di centro nell'origine, con $\mathcal{C}$ di raggio 2 e Γ di raggio $\sqrt{2}$, nel cerchio $\mathcal{C}$ si generano a caso ripetutamente dei punti $Q_1 = (X_1, Y_1), Q_2 = (X_2, Y_2), \ldots$, interrompendo l'esperimento la prima volta che il punto generato capita nel cerchio Γ. Indicando con Z il numero aleatorio di punti generati e definiti gli eventi $E = (4 \leq Z \leq 5)\,,\ H = (Z > 2)$, calcolare la probabilità dell'evento condizionato $E|H$.

   $P(E|H) =$

3. La densità di probabilità di un numero aleatorio X è $f(x) = 0$, per $x < 0$; $f(x) = x$, per $x \in [0,1]$; $f(x) = 1/x^3$, per $x > 1$. Calcolare, per $x > 0$, la funzione di sopravvivenza e la funzione di rischio di X.

   $S(x) = \begin{cases} \quad , \\ \quad , \end{cases}$ $h(x) = \begin{cases} \quad , \\ \quad , \end{cases}$

4. Due veicoli a e b percorrono un tratto di strada con velocità aleatorie X (veicolo a) e Y (veicolo b). Indicando con $\mathcal{C}$ il triangolo di vertici i punti $(0,0), (2,1), (2,3)$, la densità congiunta del vettore aleatorio (X,Y) è $f(x,y) = \frac{1}{4}xy$ per $(x,y) \in \mathcal{C}$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Calcolare la probabilità α che il tempo impiegato da a sia superiore a quello impiegato da b.

   $\alpha =$

5. Da un lotto di composizione incognita contenente 5 pezzi, dei quali almeno 4 buoni, si effettuano 2 estrazioni con restituzione; definiti gli eventi $E_i =$ *"l'i-mo pezzo estratto è buono"*, $i = 1,2$, $H =$ *"il lotto contiene 1 pezzo difettoso"*, con $P(H) = \frac{1}{4}$, calcolare $P(H|E_1E_2)$.

   $P(H|E_1E_2) =$

6. Una persona deve sbrigare due pratiche in due sportelli di un ufficio. Siano X e Y i tempi aleatori impiegati per le due pratiche e T il tempo totale. La densità congiunta del vettore aleatorio (X,Y) è $f(x,y) = 2e^{-2x-y}$, per $x \geq 0, y \geq 0$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Calcolare la previsione μ e lo scarto quadratico medio σ di T.

   $\mu =$ $\sigma =$

7. La densità iniziale di un parametro aleatorio continuo Θ è $\beta(\theta) = 2e^{-2\theta}$, per $\theta \geq 0$, con $\beta(\theta) = 0$ altrove. Le componenti di un campione casuale $X = (X_1, X_2, X_3)$, subordinatamente a ogni fissato valore θ, hanno una densità $f(x\,|\,\theta) = \theta e^{-\theta x}$, per $x \geq 0$, con $f(x\,|\,\theta) = 0$ altrove. Avendo osservato un campione $x = (x_1, x_2, x_3)$, con $x_1 + x_2 + x_3 = 14$, calcolare la previsione di Θ condizionata ad x.

   $\mathbb{P}(\Theta\,|\,x) =$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 13/2/2009.

1. X ha una distribuzione ipergeometrica di parametri $N_1 = 4, n = 3, p = \frac{1}{2}$, mentre Y ha una distribuzione ipergeometrica di parametri $N_2 = 8, n = 3, p = \frac{1}{2}$. Pertanto

$$\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(Y) = np = \frac{3}{2}\,; \quad \delta = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0\,;$$

$$var(X) = npq\left(1 - \frac{n-1}{N_1 - 1}\right) = \frac{1}{4}\,, \quad var(Y) = npq\left(1 - \frac{n-1}{N_2 - 1}\right) = \frac{15}{28}\,; \quad \gamma = \frac{15}{28} - \frac{1}{4} = \frac{2}{7}\,.$$

2. Si ha $\mu(\mathcal{C}) = 4\pi$, $\mu(\Gamma) = 2\pi = \frac{1}{2}\,\mu(\mathcal{C})$; allora, essendo i punti generati a caso e quindi con distribuzione uniforme su $\mathcal{C}$, si ha

$$P(Q_i \in \Gamma) = P[(X_i, Y_i) \in \Gamma] = \int\int_\Gamma f(x,y)dxdy = \frac{\mu(\Gamma)}{\mu(\mathcal{C})} = \frac{1}{2}\,, \quad \forall\, i\,.$$

Pertanto, Z ha una distribuzione geometrica di parametro $p = \frac{1}{2}$, con

$$P(Z = n) = pq^{n-1} = \frac{1}{2^n}\,, \quad P(Z > n) = q^n = \frac{1}{2^n}\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,;$$

quindi

$$P(E|H) = P(4 \le Z \le 5 \,|\, Z > 2) = \frac{P(4 \le Z \le 5, Z > 2)}{P(Z > 2)} =$$

$$= \frac{P(4 \le Z \le 5)}{P(Z > 2)} = \frac{P(Z = 4) + P(Z = 5)}{P(Z > 2)} = \frac{\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5}}{\frac{1}{2^2}} = \frac{3}{8}\,.$$

3. Per $x \in [0, 1]$ si ha $F(x) = \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$ e quindi $S(x) = 1 - F(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$; inoltre, per $x > 1$ si ha

$$S(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^3}\,dt = \left[\frac{t^{-2}}{-2}\right]_x^{+\infty} = \frac{1}{2x^2}\,.$$

allora, per $x \in [0, 1]$ si ha

$$h(x) = \frac{f(x)}{S(x)} = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{2}} = \frac{2x}{2 - x^2}\,;$$

infine, per $x > 1$ si ha

$$h(x) = \frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{2x^2}} = \frac{2}{x}\,.$$

4. Il tempo impiegato dal veicolo a è superiore a quello impiegato da b se e solo se $X < Y$, ovvero se e solo se (X, Y) appartiene al triangolo T di vertici i punti $(0,0), (2,2), (2,3)$. Pertanto, osservando che l'equazione della retta passante per i punti $(0,0), (2,2)$ è $y = x$ e che l'equazione della retta passante per i punti $(0,0), (2,3)$ è $y = \frac{3}{2}\,x$, segue

$$\alpha = P(X < Y) = P[(X,Y) \in T] = \int\int_T f(x,y)dxdy =$$

$$= \int_0^2 dx \int_x^{\frac{3}{2}\,x} \frac{1}{4}\,xydy = \frac{1}{4}\int_0^2 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_x^{\frac{3}{2}\,x} dx = \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{5}{4}x^3 dx = \frac{5}{8}\,.$$

5. Si ha

$$P(H^c) = \frac{3}{4}, \quad P(E_1E_2|H) = P(E_1|H)P(E_2|H) = \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{16}{25}, \quad P(E_1E_2|H^c) = 1\,.$$

Allora

$$P(E_1E_2) = P(E_1E_2|H)P(H) + P(E_1E_2|H^c)P(H^c) = \frac{16}{25}\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{3}{4} = \frac{91}{100}\,;$$

pertanto

$$P(H|E_1E_2) = \frac{P(E_1E_2|H)P(H)}{P(E_1E_2)} = \frac{\frac{16}{25}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{91}{100}} = \frac{16}{91} \simeq 0.1758\,.$$

6. Si ha

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_0^{+\infty} 2e^{-2x-y}dy = 2e^{-2x}\int_0^{+\infty} e^{-y}dy = 2e^{-2x}\,,\ x \geq 0\,;$$

$$f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_0^{+\infty} 2e^{-2x-y}dx = e^{-y}\int_0^{+\infty} 2e^{-2x}dx = e^{-y}\,,\ y \geq 0\,;$$

con $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)\,,\ \forall\,(x,y)$. Pertanto, X e Y hanno una distribuzione esponenziale di parametri $\lambda_1 = 2\,,\ \lambda_2 = 1$ e sono stocasticamente indipendenti. Allora

$$\mu = \mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(X+Y) = \mathbb{P}(X) + \mathbb{P}(Y) = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}\,;$$

$$\sigma = \sqrt{var(X+Y)} = \sqrt{var(X) + var(Y)} = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2}} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}\,.$$

7. Si ha

$$\alpha(x\,|\,\theta) = f(x_1\,|\,\theta)f(x_2\,|\,\theta)f(x_3\,|\,\theta) = \theta e^{-\theta x_1}\theta e^{-\theta x_2}\theta e^{-\theta x_3} = \theta^3 e^{-14\theta}\,.$$

Allora

$$\beta(\theta\,|\,x) = k(x)\beta(\theta)\alpha(x\,|\,\theta) = k(x)2e^{-2\theta}\theta^3 e^{-14\theta} = k_1(x)\theta^3 e^{-16\theta}\,,\quad \theta \geq 0\,,$$

con $\beta(\theta\,|\,x) = 0$ altrove. Quindi, la distribuzione finale di Θ è di tipo Gamma di parametri $c_3 = 4\,,\ \lambda_3 = 16$, con $k_1(x) = \frac{\lambda_3^{c_3}}{\Gamma(c_3)} = \frac{16^4}{3!}$. Pertanto: $\mathbb{P}(\Theta\,|\,x) = \frac{c_3}{\lambda_3} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.