Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Latina* - 15/6/2009)
(il punteggio massimo si ottiene risolvendo correttamente 5 esercizi)

1. Utilizzando un'urna contenente 2 palline bianche e 3 nere si fanno due tipi di esperimenti: (a) estrazioni con restituzione; (b) estrazioni senza restituzione. Definiti gli eventi $A =$ *"la prima pallina estratta è bianca"*, $B =$ *"la seconda pallina estratta è bianca"*, stabilire in quale esperimento è maggiore la probabilità dell'evento condizionato $A|(A \vee B)$.

   esperimento n. ?

2. Con riferimento al caso (a) dell'esercizio precedente, indicando con X il numero aleatorio di palline bianche ottenute in 6 estrazioni, calcolare la funzione caratteristica di X.

   $\varphi(t) =$

3. La densità di probabilità di un numero aleatorio X è $f(x) = 0$, per $x < 0$; $f(x) = \frac{1}{2}$, per $x \in [0,1]$; $f(x) = \frac{1}{2x^2}$, per $x > 1$. Calcolare, per $x > 0$, la funzione di sopravvivenza e la funzione di rischio di X.

   $S(x) = \begin{cases} & , \\ & , \end{cases}$ $h(x) = \begin{cases} & , \\ & , \end{cases}$

4. Un veicolo si sposta da una località A ad una località B in un tempo aleatorio X (misurato in ore) e successivamente da B ad A in un tempo aleatorio Y. Indicando con $\mathcal{Q}$ il quadrato di vertici i punti $(1,1),(2,1),(2,2),(1,2)$, la densità congiunta del vettore aleatorio (X,Y) è $f(x,y) = \frac{4}{9}xy$ per $(x,y) \in \mathcal{Q}$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Calcolare la probabilità α che il tempo totale T (andata + ritorno) impiegato dal veicolo non sia maggiore di 3 ore.

   $\alpha =$

5. Con riferimento all'esercizio precedente, stabilire se X e Y sono incorrelati.

   Incorrelati ?

6. La densità iniziale di un parametro aleatorio continuo Θ è $\beta(\theta) = N_{m_0,\sigma_0}(\theta) = N_{0,2}(\theta) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\theta^2}{8}}$. Le componenti di un campione casuale $X = (X_1, X_2, X_3)$, subordinatamente a ogni fissato valore θ, hanno una densità $f(x\,|\,\theta) = N_{\theta,\sigma}(x) = N_{\theta,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2}}$. Avendo osservato un campione $x = (x_1, x_2, x_3)$, con $x_1+x_2+x_3 = 0$, calcolare la previsione di Θ condizionata ad x.

   $\mathbb{P}(\Theta\,|\,x) =$

7. Da un'urna contenente N palline, delle quali pN bianche e qN nere, si effettuano 3 estrazioni con restituzione. Sia $E_i =$ *"l'i-ma pallina estratta è bianca"*, $i = 1,2,3$; $X = |E_1| + |E_2| + |E_3|$, $Y = |E_2| + |E_3|$. Calcolare il coefficiente di correlazione di X, Y.

   $\rho =$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 15/6/2009.

1. Nel caso (a) si ha
$$P(A) = P(B) = \frac{2}{5}\,, \quad P(AB) = P(A)P(B) = \frac{4}{25}\,, \quad P[A|(A \vee B)] = \frac{P(A)}{P(A \vee B)} = \cdots = \frac{5}{8}\,.$$
Nel caso (b), osservando che $P(B|A) = \frac{1}{4}$, si ha
$$P(A) = P(B) = \frac{2}{5}\,, \quad P(AB) = \frac{1}{10}\,, \quad P[A|(A \vee B)] = \frac{P(A)}{P(A \vee B)} = \cdots = \frac{4}{7} \; < \; \frac{5}{8}\,.$$
Pertanto, la probabilità dell'evento condizionato $A|(A \vee B)$ è maggiore nel caso (a), in cui si effettuano estrazioni con restituzione (*tale risultato dipende dal fatto che $P(A \vee B)$ è minore nel caso (a)*).

2. Trattandosi di estrazioni con restituzione si ha $X \sim B(n,p)$, con $n = 6, p = \frac{2}{5}$, e con
$$P(X = h) = p_h = \binom{6}{h} \left(\frac{2}{5}\right)^h \left(\frac{3}{5}\right)^{6-h}\,, \quad h = 0, 1, \ldots, 6\,.$$
Allora
$$\varphi(t) = \mathbb{P}(e^{itX}) = \sum_{h=0}^{6} p_h e^{ith} = \sum_{h=0}^{6} \binom{6}{h} \left(\frac{2}{5}\, e^{it}\right)^h \left(\frac{3}{5}\right)^{6-h} = \left(\frac{2}{5}\, e^{it} + \frac{3}{5}\right)^6\,.$$

3. Per $x \in [0,1]$ si ha $F(x) = \int_0^x \frac{1}{2}\, dt = \frac{x}{2}$ e quindi $S(x) = 1 - F(x) = 1 - \frac{x}{2}$; inoltre, per $x > 1$ si ha
$$S(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{2t^2}\, dt = \left[-\frac{1}{2t}\right]_x^{+\infty} = \frac{1}{2x}\,.$$
allora, per $x \in [0,1]$ si ha
$$h(x) = \frac{f(x)}{S(x)} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{1}{2 - x}\,;$$
infine, per $x > 1$ si ha
$$h(x) = \frac{\frac{1}{2x^2}}{\frac{1}{2x}} = \frac{1}{x}\,.$$

4. Si ha $T = X + Y$; pertanto, indicando con D il triangolo di vertici i punti $(1,1), (2,1), (1,2)$ e osservando che l'equazione della retta passante per i punti $(2,1), (1,2)$ è $y = 3 - x$, si ha
$$\alpha = P(X + Y \leq 3) = P[(X,Y) \in D] = \int\int_D f(x,y)dxdy =$$
$$= \int_1^2 dx \int_1^{3-x} \frac{4}{9}\, xydy = \frac{4}{9} \int_1^2 x \left[\frac{y^2}{2}\right]_1^{3-x} dx = \frac{2}{9} \int_1^2 x(x^2 - 6x + 8)dx = \cdots = \frac{7}{18}\,.$$

5. Si ha
$$f_1(x) = \int_1^2 f(x,y)dy = \cdots = \frac{2}{3}\,x\,, \quad 1 \le x \le 2\,,$$
con $f_1(x) = 0$ altrove; analogamente
$$f_2(y) = \int_1^2 f(x,y)dx = \cdots = \frac{2}{3}\,y\,, \quad 1 \le y \le 2\,,$$
con $f_2(y) = 0$ altrove. Allora $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$, $\forall\,(x,y)$; ovvero X e Y sono stocasticamente indipendenti e di conseguenza sono anche incorrelati.

6. Si ha $\overline{x} = \frac{x_1+x_2+x_3}{3} = 0 = m_0$; inoltre
$$\beta(\theta\,|\,x) = k(x)\beta(\theta)\alpha(x\,|\,\theta) = \cdots = N_{m_3,\sigma_3}\,,$$
con
$$\frac{1}{\sigma_3^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{3}{\sigma^2} = \frac{1}{4} + 3 = \frac{13}{4}\,, \quad m_3 = \frac{\frac{1}{\sigma_0^2}\cdot m_0 + \frac{3}{\sigma^2}\cdot \overline{x}}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{3}{\sigma^2}} = 0\,.$$
Pertanto: $\Theta|x \sim N_{0,\frac{2}{\sqrt{13}}}$, con $I\!\!P(\Theta\,|\,x) = m_3 = 0$.

7. Osservando che $X \sim B(3,p)$, $Y \sim B(2,p)$ e che $Cov(|E_i|,|E_j|) = 0$ per $i \neq j$, segue
$$Cov(X,Y) = Cov(Y + |E_1|, Y) = Cov(Y,Y) + Cov(|E_1|,Y) =$$
$$= Var(Y) + Cov(|E_1|,|E_2|) + Cov(|E_1|,|E_3|) = Var(Y) = 2pq\,;$$
inoltre $Var(X) = 3pq$. Pertanto: $\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{2pq}{\sqrt{6}pq} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.