Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Latina* - 23/1/2009)
(il punteggio massimo si ottiene risolvendo correttamente 5 esercizi)

1. Sia data un'urna U, contenente 1 pallina bianca e 1 nera, e un'urna V, contenente 1 pallina bianca e 2 nere. Tizio e Caio effettuano 3 estrazioni con restituzione, rispettivamente, da U e V. Definiti gli eventi $A =$ *"Tizio estrae 3 palline dello stesso colore"*, $B =$ *"Caio estrae 3 palline dello stesso colore"*, $C =$ *"si verifica uno solo degli eventi* A, B*"*, calcolare la differenza $\delta = P(B|C) - P(A|C)$.

   $\delta =$

2. Un lotto di 14 componenti ne contiene 2 difettosi. Calcolare: (i) la probabilità α che, effettuando un controllo su 5 componenti presi a caso, al massimo un componente risulti difettoso; (ii) la varianza del numero aleatorio X di componenti trovati difettosi fra i 5 componenti controllati.

   $\alpha =$ $\qquad$ $var(X) =$

3. Con riferimento all'esercizio precedente, determinare la funzione caratteristica del numero aleatorio X.

   $\varphi(t) =$

4. La razione di caffè erogata da un distributore automatico ha un peso aleatorio X (in grammi) con distribuzione di probabilità normale, di parametri m, σ, con $m = 30$. La probabilità che la singola razione contenga almeno 33 grammi di caffè è valutata $0,1587$; calcolare lo scarto standard σ. Il costo, per il gestore, della singola erogazione è maggiore della somma pagata dal cliente se risulta $(X > 36)$; qual'è la probabilità p di tale evento? (*Nota:* $\Phi(-1) \simeq 0,1587$; $\Phi(2) \simeq 0,9772$)

   $\sigma =$ $\qquad$ $p =$

5. La densità di probabilità di un numero aleatorio X è $f(x) = 0$ per $x < 0$, $f(x) = x/4$, per $x \in [0, 2]$, $f(x) = 1/x^2$, per $x > 2$. Determinare, per $x > 0$, la funzione di sopravvivenza e la funzione di rischio di X.

   $S(x) = \begin{cases} \quad , \\ \quad , \end{cases}$ $\qquad$ $h(x) = \begin{cases} \quad , \\ \quad , \end{cases}$

6. I tempi aleatori impiegati da due veicoli per percorrere un tratto di strada sono rispettivamente X e Y. La densità congiunta del vettore (X, Y) è $f(x, y) = a(x + y)$, per $(x, y) \in [1, 2] \times [1, 2]$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare il valore di a e stabilire se i due eventi $(X \leq Y)$ e $(X > Y)$ sono equiprobabili.

   $a =$ $\qquad$ *equiprobabili* ?

7. Da un lotto di composizione incognita contenente 5 pezzi, con al massimo 1 difettoso, si effettuano 2 estrazioni con restituzione. Definiti gli eventi $E_i =$ *"l'i-mo pezzo estratto è buono"*, $i = 1, 2$, $H =$ *"il lotto contiene 1 pezzo difettoso"*, con $P(H) = \frac{1}{3}$, stabilire se $P(E_2|E_1) > P(E_2)$.

   $P(E_2|E_1) \; > \; P(E_2)$?

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 23/1/2009.

1. Si ha
$$P(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}, \quad P(B) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{1}{3}.$$
Inoltre, A e B sono stocasticamente indipendenti, con $C = AB^c \vee A^cB$; allora
$$P(A|C) = \frac{P(AC)}{P(C)} = \frac{P(AB^c)}{P(AB^c) + P(A^cB)} = \frac{P(A)P(B^c)}{P(A)P(B^c) + P(A^c)P(B)} = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{2}{5};$$
$$P(B|C) = \frac{P(BC)}{P(C)} = \frac{P(A^cB)}{P(AB^c) + P(A^cB)} = 1 - \frac{P(AB^c)}{P(AB^c) + P(A^cB)} = 1 - P(A|C) = \frac{3}{5}.$$
Pertanto: $\delta = \frac{1}{5}$.

2. Si ha $X \sim \mathbf{H}(N, n, p)$, con $N = 14$, $n = 5$, $p = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$, $X \in \{0, 1, 2\}$. Pertanto
$$\alpha = P(X \leq 1) = 1 - P(X = 2) = 1 - \frac{\binom{2}{2}\binom{12}{3}}{\binom{14}{5}} = \frac{81}{91};$$
$$var(X) = npq\left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right) = \cdots = \frac{270}{637} \simeq 0,4239.$$

3. Si ha
$$P(X = 2) = 1 - \frac{81}{91} = \frac{10}{91}, \quad P(X = 0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{12}{5}}{\binom{14}{5}} = \frac{36}{91}, \quad P(X = 1) = 1 - \frac{36}{91} - \frac{10}{91} = \frac{45}{91};$$
pertanto
$$\varphi(t) = \mathbb{P}(e^{itX}) = \sum_{h=0}^{2} \frac{\binom{pN}{h}\binom{qN}{n-h}}{\binom{N}{n}} e^{ith} = \sum_{h=0}^{2} \frac{\binom{2}{h}\binom{12}{5-h}}{\binom{14}{5}} e^{ith} = \frac{36}{91} + \frac{45}{91} e^{it} + \frac{10}{91} e^{2it}.$$

4. Per ipotesi $X \sim N_{30,\sigma}$, con $P(X \geq 33) \simeq 0,1587$. Considerando il n.a. standardizzato $Z = \frac{X-30}{\sigma}$, si ha
$$\Phi(-1) \simeq 0.1587 = P(X \geq 33) = P\left(\frac{X-30}{\sigma} \geq \frac{33-30}{\sigma}\right) = P\left(Z \geq \frac{3}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{3}{\sigma}\right) = \Phi\left(-\frac{3}{\sigma}\right);$$
ovvero: $\Phi(-1) \simeq \Phi(-\frac{3}{\sigma})$; allora: $-\frac{3}{\sigma} \simeq -1$, da cui segue: $\sigma \simeq 3$.
Inoltre, osservando che $m + 2\sigma \simeq 36$, segue
$$p = P(X \geq 36) \simeq P(X \geq m + 2\sigma) = P(Z \geq \frac{36-30}{6}) = P(Z \geq 2) = 1 - \Phi(2) \simeq 1 - 0.9772 = 0,0228.$$

5. Per $x \in [0,2]$ si ha $F(x) = \int_0^x \frac{t}{4}\, dt = \frac{x^2}{8}$ e quindi $S(x) = 1 - F(x) = 1 - \frac{x^2}{8}$; inoltre, per $x > 2$ si ha

$$S(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_x^{+\infty} = \frac{1}{x}\,.$$

allora, per $x \in [0,2]$ si ha

$$h(x) = \frac{f(x)}{S(x)} = \frac{\frac{x}{4}}{1 - \frac{x^2}{8}} = \frac{2x}{8 - x^2}\,;$$

infine, per $x > 2$ si ha

$$h(x) = \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\,.$$

6. Si ha

$$\int_1^2 dx \int_1^2 a(x+y)dy = a \int_1^2 \left(x + \frac{3}{2}\right) dx = a\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right) = 3a = 1\,,$$

da cui segue: $a = \frac{1}{3}$. Inoltre

$$P(X \leq Y) = \int_1^2 dx \int_x^2 \frac{1}{3}(x+y)dy = \cdots = \frac{1}{3}\int_1^2 \left(2 + 2x - \frac{3}{2}x^2\right) dx = \frac{1}{3}\left[2x + x^2 - \frac{1}{2}x^3\right]_1^2 = \cdots = \frac{1}{2}\,;$$

quindi: $P(X > Y) = 1 - P(X \leq Y) = \frac{1}{2}$. Pertanto, gli eventi sono equiprobabili.

7. Si ha $P(H^c) = \frac{2}{3}$; $P(E_i|H) = \frac{4}{5}$, $P(E_i|H^c) = 1$, $i = 1,2$. Allora

$$P(E_i) = P(E_i|H)P(H) + P(E_i|H^c)P(H^c) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{14}{15} \simeq 0,9333\,, \quad i = 1,2\,;$$

$$P(E_1E_2) = P(E_1E_2|H)P(H) + P(E_1E_2|H^c)P(H^c) = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{22}{25}\,.$$

Pertanto

$$P(E_2|E_1) = \frac{P(E_1E_2)}{P(E_1)} = \frac{\frac{22}{25}}{\frac{14}{15}} = \frac{33}{35} \simeq 0,9429 \; > \; P(E_2)\,.$$

Nota: $P(E_1|E_2) = \frac{P(E_1E_2)}{P(E_2)} = \frac{P(E_1E_2)}{P(E_1)} = P(E_2|E_1)$; quindi: $P(E_1|E_2) \; > \; P(E_1)$.