Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Latina* - 7/7/2009)
(il punteggio massimo si ottiene risolvendo correttamente 5 esercizi)

1. Sia T il triangolo di vertici i punti $(0,1),(3,0),(3,2)$. La densità congiunta di un vettore aleatorio (X,Y) è $f(x,y)=kxy$, per $(x,y)\in T$, con $f(x,y)=0$ altrove. Calcolare la costante k e il valore x_0 tale che $P(X>x_0)=7P(X\leq x_0)$.

   $k=$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $x_0=$

2. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la previsione di X.

   $\mathbb{P}(X)=$

3. Utilizzando un'urna contenente 3 palline bianche e 2 nere si fanno due tipi di esperimenti: (a) estrazioni con restituzione; (b) estrazioni senza restituzione. Definiti gli eventi $A=$ *"la prima pallina estratta è bianca"*, $B=$ *"la seconda pallina estratta è bianca"*, stabilire in quale esperimento è maggiore la probabilità dell'evento condizionato $AB|(A\vee B)$.

   esperimento n. ?

4. Con riferimento al caso (b) dell'esercizio precedente, indicando con X il numero aleatorio di palline nere ottenute in 3 estrazioni, calcolare la funzione caratteristica di X.

   $\varphi(t)=$

5. La densità congiunta di un vettore aleatorio (X,Y) è $f(x,y)=\frac{3}{2}e^{-x-y}$, per $x\geq 0$, $y\geq \frac{x}{2}$, con $f(x,y)=0$ altrove. Calcolare la funzione di rischio $h_1(x)$ del numero aleatorio X.

   $h_1(x)=$

6. Le componenti di un vettore aleatorio $X=(X_1,\ldots,X_5)$ sono stocasticamente indipendenti e con disribuzione normale di parametri m,σ. Posto $Y_i=\frac{X_i-m}{\sigma}$, $i=1,\ldots,5$; $\overline{Y}=\frac{Y_1+\cdots+Y_5}{5}$, calcolare la probabilità dell'evento $\left(|\overline{Y}|\leq\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

   $$P\left(|\overline{Y}|\leq\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=$$

7. Da un'urna di composizione incognita si deve estrarre una pallina; sulla composizione dell'urna ci sono due ipotesi possibili: $H=$ *"nell'urna ci sono 3 palline bianche e 2 nere"*; $H^c=$ *"nell'urna ci sono 2 palline bianche e 3 nere"*, con $P(H)=p$. Definito l'evento $E=$ *"la pallina estratta è bianca"*, calcolare per quali valori di p l'evento condizionato $H|E$ risulta più probabile di $H^c|E$.

   $p\in$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 7/7/2009.

1. La retta passante per i punti $(0,1),(3,0)$ ha equazione $y = -\frac{x}{3}+1$, mentre la retta passante per i punti $(0,1),(3,2)$ ha equazione $y = \frac{x}{3}+1$. Allora, essendo

$$\int\int_T f(x,y)dxdy = k\int_0^3 \int_{-\frac{x}{3}+1}^{\frac{x}{3}+1} xydxdy = \cdots = 6k = 1\,,$$

segue: $k = \frac{1}{6}$. Inoltre, essendo $P(X > x_0) + P(X \leq x_0) = 1$, segue

$$P(X \leq x_0) = \frac{1}{8} = \frac{1}{12}\int_0^{x_0} \int_{-\frac{x}{3}+1}^{\frac{x}{3}+1} xydxdy = \cdots = \frac{x_0^3}{27}\,;$$

pertanto: $x_0 = \frac{3}{2}$.

2. Si ha $X \in [0,3]$, con

$$f_1(x) = \frac{1}{6}\int_{-\frac{x}{3}+1}^{\frac{x}{3}+1} xydy = \cdots = \frac{x^2}{9}\,, \quad x \in [0,3]\,,$$

con $f_1(x) = 0$ altrove. (*In altro modo: dall'esercizio precedente* $P(X \leq x_0) = F_1(x_0) = \frac{x_0^3}{27}$, *con* $x_0 \in [0,3]$; *quindi* $F_1(x) = \frac{x^3}{27}$ *ed* $f_1(x) = F_1'(x) = \frac{x^2}{9}$, $x \in [0,3]$). Allora

$$\mathbb{P}(X) = \int_0^3 xf_1(x)dx = \cdots = \frac{9}{4}\,.$$

3. Nel caso (a) si ha

$$P(A) = P(B) = \frac{3}{5}\,, \quad P(AB) = P(A)P(B) = \frac{9}{25}\,, \quad P(A^cB^c) = P(A^c)P(B^c) = \frac{4}{25}$$

$$P[AB|(A \vee B)] = \frac{P(AB)}{P(A \vee B)} = \frac{P(AB)}{1 - P(A^cB^c)} = \frac{3}{7}\,.$$

Nel caso (b), osservando che $P(B|A) = \frac{1}{2}$, $P(B^c|A^c) = \frac{1}{4}$, si ha

$$P(A) = P(B) = \frac{3}{5}\,, \quad P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{3}{10}\,, \quad P(A^cB^c) = P(A^c)P(B^c|A^c) = \frac{1}{10}\,,$$

$$P[AB|(A \vee B)] = \frac{P(AB)}{P(A \vee B)} = \frac{P(AB)}{1 - P(A^cB^c)} = \frac{1}{3}\,.$$

Pertanto, la probabilità dell'evento condizionato $AB|(A \vee B)$ è maggiore nel caso (a), di estrazioni con restituzione. (*tale risultato dipende dal fatto che, passando dal caso (a) al caso (b),* $P(AB)$ *diminuisce e* $P(A \vee B)$ *aumenta; pertanto il rapporto* $\frac{P(AB)}{P(A \vee B)}$ *diminuisce*).

4. Trattandosi di estrazioni senza restituzione si ha $X \sim H(N,n,p)$, con $N=5, n=3, p=\frac{2}{5}$, e con

$$P(X=h)=p_h=\frac{\binom{2}{h}\binom{3}{3-h}}{\binom{5}{3}}\,, \quad h=0,1,2\,.$$

Allora

$$\varphi(t)=\mathbb{P}(e^{itX})=\sum_{h=0}^{2}p_he^{ith}=\sum_{h=0}^{2}\frac{\binom{2}{h}\binom{3}{3-h}}{\binom{5}{3}}\,e^{ith}=\frac{1+6e^{it}+3e^{2it}}{10}\,.$$

5. Si ha

$$f_1(x)=\frac{3}{2}\int_{\frac{x}{2}}^{+\infty}e^{-x-y}dy=\frac{3}{2}e^{-x}\int_{\frac{x}{2}}^{+\infty}e^{-y}dy=\frac{3}{2}\,e^{-x}e^{-\frac{x}{2}}=\frac{3}{2}\,e^{-\frac{3}{2}x}\,,\quad x\geq 0\,,$$

con $f_1(x)=0$ altrove (*distribuzione esponenziale di parametro* $\lambda=\frac{3}{2}$). Pertanto, per ogni $x>0$, si ha

$$S_1(x)=P(X>x)=\int_x^{+\infty}\frac{3}{2}\,e^{-\frac{3}{2}t}dt=e^{-\frac{3}{2}x}\,;\quad h_1(x)=\frac{f_1(x)}{S_1(x)}=\frac{\frac{3}{2}\,e^{-\frac{3}{2}x}}{e^{-\frac{3}{2}x}}=\frac{3}{2}\,.$$

6. Si ha $Y_i \sim N_{0,1}$, $i=1,\ldots,5$; inoltre, per l'ipotesi di indipendenza stocastica, anche $\overline{Y}$ ha una distribuzione normale, di parametri

$$\overline{m}=\mathbb{P}(\overline{Y})=\mathbb{P}\left(\frac{Y_1+\cdots+Y_5}{5}\right)=0\,,\ \ \overline{\sigma}^2=Var(\overline{Y})=\frac{Var(Y_1)+\cdots+Var(Y_5)}{25}=\frac{1}{5}\,.$$

Pertanto il numero aleatorio $Z=\frac{\overline{Y}-\overline{m}}{\overline{\sigma}}=\sqrt{5}\;\overline{Y}$ ha una distribuzione normale standard. Allora

$$P\left(|\overline{Y}|\leq\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=P(|\sqrt{5}\;\overline{Y}|\leq 1)=P(-1\leq Z\leq 1)=2\Phi(1)-1\;\simeq\;0.6826\,.$$

7. Si ha

$$P(E|H)=\frac{3}{5}\,,\ \ P(E|H^c)=\frac{2}{5}\,,\ \ P(E)=\frac{3}{5}\,p+\frac{2}{5}\,(1-p)=\frac{1}{5}\,p+\frac{2}{5}\,;$$

pertanto

$$P(H|E)=\frac{P(E|H)P(H)}{P(E)}=\frac{\frac{3}{5}\,p}{\frac{1}{5}\,p+\frac{2}{5}}=\frac{3p}{p+2}\,;\ \ P(H^c|E)=1-P(H|E)=\frac{2-2p}{p+2}\,.$$

Allora

$$P(H|E)>P(H^c|E)\iff 3p>2-2p\iff p\in\left(\frac{2}{5},1\right]\,.$$