Calcolo delle probabilità (10/04/2010)

(Ing. Ambiente e Territorio - Roma)

1. Un operatore preleva a caso 4 componenti da un lotto L contenente 5 pezzi buoni e 1 difettoso. L'operatore utilizza in periodi successivi tali componenti, scegliendo ogni volta a caso un componente e rimettendolo insieme agli altri tre al termine dell'operazione. Definiti gli eventi $H =$ *"il componente difettoso è presente fra i 4 componenti prelevati da L"*, $E_i =$ *"l'i-mo pezzo scelto a caso dall'operatore è buono"*, $i = 1, 2$, calcolare $\gamma = P(H|E_1)$ e $p = P(E_2|E_1)$.

   $\gamma =$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $p =$

2. Un oggetto si trova in una regione rappresentata dal parallelogramma D di vertici $(0, 0)$, $(2, 1), (2, 3), (0, 2)$. Assumendo una distribuzione uniforme per la posizione aleatoria (X, Y) dell'oggetto, calcolare la probabilità α dell'evento condizionato $(X > 1)|(1 \leq Y \leq 2)$.

   $\alpha =$

3. A partire da una data posizione iniziale, su una retta si effettuano due spostamenti aleatori X e Y, con densità congiunta $f(x, y) = \frac{1}{6\pi} e^{-\frac{(x-10)^2}{18} - \frac{(y-4)^2}{2}}$, con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calcolare la covarianza di X, Y.

   $Cov(X, Y) =$

4. Da un'urna U, contenente 1 pallina bianca e 3 nere, si prelevano a caso 2 palline che vengono inserite in un'urna V, contenente inizialmente 1 pallina bianca; successivamente, da V si estraggono in blocco 2 palline. Sia X il numero aleatorio di palline nere estratte da U e inserite in V; inoltre, sia Y il numero aleatorio di palline nere estratte da V. Calcolare, per ogni possibile valore (x, y), la probabilità p_{xy} dell'evento $(X = x, Y = y)$.

   $(x, y) :$

   p_{xy} :

Calcolo delle probabilità *(Ing. Amb. e Terr. - Roma)*
Soluzioni della prova scritta del 10/04/2010.

1. Si ha: $P(H) = \frac{\binom{5}{3}\binom{1}{1}}{\binom{6}{4}} = \frac{2}{3}$, $P(E_1|H) = \frac{3}{4}$, $P(E_1|H^c) = 1$; quindi
$$\gamma = \frac{P(H)P(E_1|H)}{P(H)P(E_1|H) + P(H^c)P(E_1|H^c)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot 1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}} = \frac{3}{5}.$$
Inoltre: $P(E_1E_2|H) = P(E_1|H)P(E_2|H) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$, $P(E_1E_2|H^c) = 1$; allora
$$P(E_1E_2) = P(H)P(E_1E_2|H) + P(H^c)P(E_1E_2|H^c) = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{16} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{17}{24};$$
pertanto: $p = P(E_2|E_1) = \frac{P(E_1E_2)}{P(E_1)} = \frac{\frac{17}{24}}{\frac{5}{6}} = \frac{17}{20}$.

2. L'area del parallelogramma (in un'opportuna unità di misura) è pari a 4, pertanto $f(x,y) = \frac{1}{4}$, per $(x,y) \in D$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Inoltre, osserviamo che: (i) risulta $1 \le Y \le 2$ se e solo se (X,Y) appartiene al rettangolo R di vertici $(0,1), (2,1), (2,2), (0,2)$, di area $\mu(R) = 2$; (ii) risulta $(X > 1, 1 \le Y \le 2)$ se e solo se (X,Y) appartiene al quadrato Q di vertici $(1,1), (2,1), (2,2), (1,2)$, di area $\mu(Q) = 1$. Allora
$$\alpha = P[(X > 1)|(1 \le Y \le 2)] = \frac{P(X > 1, 1 \le Y \le 2)}{P(1 \le Y \le 2)},$$
con
$$P(X > 1, 1 \le Y \le 2) = \int\int_Q f(x,y)dxdy = \frac{\mu(Q)}{\mu(D)} = \frac{1}{4},$$
$$P(1 \le Y \le 2) = \int\int_R f(x,y)dxdy = \frac{\mu(R)}{\mu(D)} = \frac{1}{2};$$
pertanto: $\alpha = \frac{\mu(Q)}{\mu(R)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

3. Ricordiamo che $f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$, $f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$; inoltre
$$f(x,y) = \frac{1}{6\pi} e^{-\frac{(x-10)^2}{18} - \frac{(y-4)^2}{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-10)^2}{18}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-4)^2}{2}} = N_{10,3}(x)N_{4,1}(y).$$
Allora
$$f_1(x) = N_{10,3}(x) \int_{-\infty}^{+\infty} N_{4,1}(y)dy = N_{10,3}(x), \quad f_2(y) = N_{4,1}(y) \int_{-\infty}^{+\infty} N_{10,3}(x)dx = N_{4,1}(y);$$
pertanto $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$; ovvero, X e Y sono stocasticamente indipendenti; quindi $Cov(X,Y) = 0$.

4. Si ha: $X \in \{1,2\}$, $Y \in \{0,1,2\}$, $(X,Y) \in \{(1,0), (1,1), (2,1), (2,2)\}$, con $P(X = 1) = P(X = 2) = \frac{1}{2}$; inoltre
$$P(Y = 0|X = 1) = \frac{1}{3}, \ P(Y = 1|X = 1) = \frac{2}{3}, \ P(Y = 1|X = 2) = \frac{2}{3}, \ P(Y = 2|X = 2) = \frac{1}{3};$$
pertanto, ricordando che $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y|X = x)$, segue
$$p_{10} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}, \quad p_{11} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}, \quad p_{21} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}, \quad p_{22} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$