Calcolo delle probabilità (13/02/2010)

(Ing. Ambiente e Territorio - Roma)

1. Da un'urna contenente 3 palline bianche e 3 nere si effettuano 2 estrazioni senza restituzione. Definiti gli eventi $A =$ *"una sola delle due palline estratte è bianca"*, $B =$ *"almeno una delle due palline estratte è bianca"*, calcolare la probabilità α dell'evento condizionato $A|B$.

   $\alpha =$

2. Siano dati due numeri aleatori X e Y, stocasticamente indipendenti e ugualmente distribuiti, con $f_1(x) = \frac{x}{2}$, per $0 \leq x \leq 2$, e con $f_1(x) = 0$ altrove. Definiti gli eventi $H = (0 \leq X \leq 1, 0 \leq Y \leq 1)$, $E = (X + Y > 1)$, calcolare la probabilità p dell'evento condizionato $E|H$.

   $p =$

3. Siano dati 2 lotti: L_1 contenente 2 pezzi buoni e 2 difettosi; L_2 contenente 3 pezzi buoni e 1 difettoso. Scelto uno dei due lotti, L_1 (con probabilità p) oppure L_2 (con probabilità $1-p$), da esso si effettuano 3 estrazioni con restituzione. Definiti gli eventi $H =$ *"le estrazioni sono state effettuate da L_1"*, $E = (X = 2)$, dove X è il numero aleatorio di pezzi buoni ottenuti nelle 3 estrazioni, calcolare per quali valori di p risulta $P(H|E) > P(H^c|E)$.

   $p \in$

4. Dato un numero aleatorio X con densità di probabilità $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, sia $Y = 2X - 1$. Calcolare la previsione m_Y e lo scarto standard σ_Y di Y; inoltre, calcolare la probabilità α dell'evento $(-3 \leq Y \leq 3)$.

   $m_Y =$ $\qquad\qquad$ $\sigma_Y =$ $\qquad\qquad$ $\alpha =$

Calcolo delle probabilità *(Ing. Amb. e Terr. - Roma)*
Soluzioni della prova scritta del 13/02/2010.

1. Definiti gli eventi $E_i =$ *"l'i-ma pallina estratta è bianca"*, $i = 1, 2$, si ha
$$A = E_1E_2^c \vee E_1^cE_2\,, \quad B = E_1 \vee E_2 = E_1E_2 \vee E_1E_2^c \vee E_1^cE_2\,, \quad AB = A\,,$$
con
$$P(A) = P(E_1E_2^c) + P(E_1^cE_2) = \frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5} + \frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5} = \frac{3}{5}\,, \quad P(B) = 1 - P(E_1^cE_2^c) = 1 - \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5} = \frac{4}{5}\,;$$
pertanto: $\alpha = P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$.

2. Si ha $f(x,y) = f_1(x)f_2(y) = \frac{1}{4}xy$, per $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Allora, posto $D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 1-x \le y \le 1\}$, si ha $P(E|H) = \frac{P(EH)}{P(H)}$, con
$$P(EH) = \int\int_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_{1-x}^1 \frac{1}{4}xydy =$$
$$= \frac{1}{8}\int_0^1 x[y^2]_{1-x}^1 dx = \frac{1}{8}\int_0^1 x(2x-x^2)dx = \frac{1}{8}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{96}\,,$$
$$P(H) = \int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^1 \frac{1}{4}xydxdy = \int_0^1 \frac{x}{2}\,dx \int_0^1 \frac{y}{2}\,dy = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{16}\,;$$
pertanto: $p = \frac{\frac{5}{96}}{\frac{1}{16}} = \frac{5}{6}$.

3. Si ha $P(H) = p\,,\ P(H^c) = 1-p$; inoltre
$$P(E|H) = P(X=2|H) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}\,,$$
$$P(E|H^c) = P(X=2|H^c) = \binom{3}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{27}{64}\,;$$
quindi
$$P(E) = P(X=2) = P(X=2|H)P(H) + P(X=2|H^c)P(H^c) = \frac{3}{8}p + \frac{27}{64}(1-p) = \frac{27-3p}{64}\,;$$
allora, tenendo conto che deve essere $P(H|E) > \frac{1}{2}$, segue
$$P(H|E) = \frac{P(EH)}{P(H)} = \frac{P(E|H)P(H)}{P(E)} = \frac{\frac{3}{8}p}{\frac{27-3p}{64}} = \frac{24p}{27-3p} > \frac{1}{2} \iff p > \frac{9}{17}\,.$$
Pertanto: $P(H|E) > P(H^c|E)$ se e solo se $p \in \left(\frac{9}{17}, 1\right]$.

4. X ha una distribuzione normale standard; pertanto: $m_X = 0$, $\sigma_X = 1$. Allora
$$m_Y = \mathbb{P}(2X-1) = 2\mathbb{P}(X) - 1 = -1\,, \ \sigma_Y^2 = Var(2X-1) = 4Var(X) = 4\,, \ \sigma_Y = 2\,.$$
Infine
$$\alpha = P(-3 \le Y \le 3) = P(-3 \le 2X-1 \le 3) = P\left(\frac{-3+1}{2} \le X \le \frac{3+1}{2}\right) =$$
$$= P(-1 \le X \le 2) = \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) + \Phi(1) - 1 \simeq 0.9772 + 0.8413 - 1 = 0.8185\,.$$