Calcolo delle probabilità (16/01/2010)

(Ing. Ambiente e Territorio - Roma)

1. Dati due numeri aleatori X e Y, indipendenti e con $X \sim B(3, \frac{1}{2})$, $Y \sim B(5, \frac{1}{2})$, calcolare la probabilità α dell'evento condizionato $(X = 1 \,|\, X + Y = 2)$.

   $\alpha =$

2. I tempi aleatori X e Y impiegati da due veicoli per percorrere un tratto di strada hanno una densità congiunta $f(x, y) = \frac{1}{8}(x+y)$, per $(x, y) \in [0, 2] \times [0, 2]$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la probabilità p dell'evento condizionato $(Y \geq X \,|\, X \leq 1)$.

   $p =$

3. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la previsione m e lo scarto quadratico medio σ di X.

   $m =$ $\sigma =$

4. Da un lotto L, contenente 5 pezzi buoni e 1 difettoso, vengono tolti a caso 4 pezzi; successivamente, si sceglie a caso uno dei due pezzi rimasti in L e viene esaminato. Definiti gli eventi $H =$"*il pezzo difettoso è rimasto nel lotto L*"; $E =$ "*il pezzo esaminato è buono*", calcolare la probabilità p che il pezzo rimasto in L sia quello difettoso, supposto vero l'evento E.

   $p =$

Calcolo delle probabilità *(Ing. Amb. e Terr. - Roma)*
Soluzioni della prova scritta del 16/01/2010.

1. Si ha $\alpha = \frac{P(X=1, X+Y=2)}{P(X+Y=2)}$, con

$$P(X=1, X+Y=2) = P(X=1, Y=1) = P(X=1)P(Y=1) = \frac{\binom{3}{1}}{2^3} \cdot \frac{\binom{5}{1}}{2^5} = \frac{15}{2^8},$$

$$P(X+Y=2) = P(X=0, Y=2) + P(X=1, Y=1) + P(X=2, Y=0) =$$
$$\frac{\binom{3}{0}}{2^3} \cdot \frac{\binom{5}{2}}{2^5} + \frac{\binom{3}{1}}{2^3} \cdot \frac{\binom{5}{1}}{2^5} + \frac{\binom{3}{2}}{2^3} \cdot \frac{\binom{5}{0}}{2^5} = \frac{10+15+3}{2^8} = \frac{28}{2^8};$$

pertanto: $\alpha = \frac{15}{28}$.

2. Si ha

$$p = P(Y \geq X \,|\, X \leq 1) = \frac{P(Y \geq X, X \leq 1)}{P(X \leq 1)},$$

con

$$P(Y \geq X, X \leq 1) = \int_0^1 dx \int_x^2 \frac{1}{8}(x+y)\, dy = \frac{1}{8}\int_0^1 (2x + 2 - \frac{3}{2}x^2)\, dx = \frac{5}{16},$$

$$P(X \leq 1) = \int_0^1 dx \int_0^2 \frac{1}{8}(x+y)\, dy = \frac{1}{8}\int_0^1 (2x+2)\, dx = \frac{3}{8};$$

pertanto: $p = \frac{\frac{5}{16}}{\frac{3}{8}} = \frac{5}{6}$.

3. Si ha $X \in [0,2]$, con $f_1(x) = \frac{1}{8}\int_0^2 (x+y)dy = \cdots = \frac{x+1}{4}$, $x \in [0,2]$, con $f_1(x) = 0$ altrove. Allora

$$\mathbb{P}(X) = \int_0^2 x f_1(x) dx = \cdots = \frac{5}{6}; \quad \mathbb{P}(X^2) = \int_0^2 x^2 f_1(x) dx = \cdots = \frac{5}{3}.$$

Pertanto: $Var(X) = \mathbb{P}(X^2) - [\mathbb{P}(X)]^2 = \frac{35}{36}$, da cui segue: $\sigma = \frac{\sqrt{35}}{6} \simeq 0.986$.

4. Si ha

$$P(H) = \frac{\binom{1}{0}\binom{5}{4}}{\binom{6}{4}} = \frac{1}{3}, \quad P(H^c) = \frac{2}{3}; \quad P(E \,|\, H) = \frac{1}{2}; \quad P(E \,|\, H^c) = 1;$$

quindi

$$P(E) = P(E \,|\, H)P(H) + P(E \,|\, H^c)P(H^c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{6};$$

pertanto

$$p = P(H \,|\, E) = \frac{P(E \,|\, H)P(H)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{5}.$$