

*(Ing. Civile - Trasporti - Ambiente e Territorio, Roma; esame da 3 o 4 crediti: esercizi 1,2,3,4)  
(esame da 6 crediti: il punteggio massimo si ottiene risolvendo correttamente 5 esercizi)*

1. Siano dati 2 lotti  $L_1$  ed  $L_2$ , contenenti entrambi 3 pezzi buoni e 1 difettoso. Dal lotto  $L_2$  viene tolto a caso un pezzo; quindi, si prende a caso un pezzo dal lotto  $L_1$  e viene inserito in  $L_2$ . Successivamente, da  $L_2$  si prelevano a caso 2 pezzi. Definiti gli eventi  $K = \text{"il pezzo tolto da } L_2 \text{ è buono"}$ ,  $H = \text{"il pezzo estratto da } L_1 \text{ e inserito in } L_2 \text{ è buono"}$ ,  $E = \text{"i 2 pezzi prelevati da } L_2 \text{ sono entrambi buoni"}$ , calcolare la probabilità  $\gamma$  dell'evento condizionato  $HK | E$ .

$$\gamma =$$

2. I tempi (in un'opportuna unità di misura) impiegati da un veicolo per percorrere due tratti di strada sono due numeri aleatori  $X, Y$ , con distribuzione di probabilità congiunta uniforme sull'insieme  $\mathcal{D} = \{(x, y) : 3 \leq x \leq 5, 1 \leq y \leq 3\}$ . Calcolare la previsione  $m_Z$  e lo scarto standard  $\sigma_Z$  del tempo di percorrenza totale  $Z = X + Y$ .

$$m_Z =$$

$$\sigma_Z =$$

3. Siano dati due numeri aleatori  $X, Y$ , stocasticamente indipendenti e con distribuzione normale di parametri  $m = 0, \sigma = 2$ . Considerati gli eventi  $(-4 \leq X \leq 0)$  e  $(0 \leq Y \leq 4)$ , calcolare la probabilità  $p$  dell'evento intersezione. (nota: ricordiamo che  $\Phi(2) \simeq 0.9772$ )

$$p =$$

4. Da un'urna contenente 4 palline bianche e 4 nere si effettuano 3 estrazioni senza restituzione. Definiti gli eventi  $E_i = \text{"l'i-ma pallina estratta è bianca"}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , calcolare le probabilità  $\gamma = P(E_2 E_3^c)$  e  $\delta = P(E_1 | E_2^c E_3)$ .

$$\gamma =$$

$$\delta =$$

5. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione caratteristica del numero aleatorio  $X = |E_1| + |E_2| + |E_3|$ .

$$\varphi_X(t) =$$

6. La densità di probabilità di un numero aleatorio  $X$  è  $f(x) = 9xe^{-3x}$  per  $x \geq 0$ , con  $f(x) = 0$  altrove. Calcolare la funzione di rischio  $h(x)$  di  $X$ , per ogni  $x > 0$ .

$$h(x) =$$

7. La densità di probabilità iniziale di un parametro aleatorio  $\Theta$  è  $\beta(\theta) = 9\theta e^{-3\theta}$  per  $\theta \geq 0$ , con  $\beta(\theta) = 0$  altrove; inoltre, per ogni fissato  $\theta$ , le componenti di un campione casuale  $X = (X_1, \dots, X_6)$  sono stocasticamente indipendenti subordinatamente a  $\theta$  e con distribuzione esponenziale di parametro  $\theta$ ; ovvero:  $X_i | \theta \sim f(x_i | \theta) = \theta e^{-\theta x_i}$ , per  $x_i \geq 0$ , con  $f(x_i | \theta) = 0$  altrove. Calcolare la previsione di  $\Theta | \mathbf{x}$ , assumendo  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_6) = (4, 5, 6, 3, 2, 1)$ .

$$\mathbb{P}(\Theta | \mathbf{x}) =$$

1. Si ha

$$P(H) = P(K) = \frac{3}{4}, \quad P(HK) = P(H)P(K) = \frac{9}{16}, \quad P(HK^c) = P(H)P(K^c) = \frac{3}{16},$$

$$P(H^cK) = P(H^c)P(K) = \frac{3}{16}, \quad P(H^cK^c) = P(H^c)P(K^c) = \frac{1}{16};$$

$$P(E|HK) = P(E|H^cK^c) = \frac{\binom{3}{2}\binom{1}{0}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{2}, \quad P(E|HK^c) = 1, \quad P(E|H^cK) = \frac{\binom{2}{2}\binom{2}{0}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} P(E) &= P(HK)P(E|HK) + P(HK^c)P(E|HK^c) + P(H^cK)P(E|H^cK) + P(H^cK^c)P(E|H^cK^c) = \\ &= \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{16} \cdot 1 + \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2} = \frac{17}{32}; \\ \gamma = P(HK|E) &= \frac{P(E|HK)P(HK)}{P(E)} = \frac{\frac{9}{16} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{17}{32}} = \frac{9}{17}. \end{aligned}$$

2. L'area del quadrato  $\mathcal{D}$  è 4; pertanto, si ha  $f(x, y) = \frac{1}{4}$ , per  $(x, y) \in \mathcal{D}$ , con  $f(x, y) = 0$  altrove. Si ha

$$f_1(x) = \int_1^3 \frac{1}{4} dy = \frac{1}{2}, \quad x \in [3, 5], \quad f_1(x) = 0, \quad x \notin [3, 5];$$

$$f_2(y) = \int_3^5 \frac{1}{4} dx = \frac{1}{2}, \quad y \in [1, 3], \quad f_2(y) = 0, \quad y \notin [1, 3].$$

Quindi  $X$  e  $Y$  sono stocasticamente indipendenti e con distribuzione uniforme nei rispettivi intervalli; allora

$$\mathbb{P}(X) = \frac{3+5}{2} = 4, \quad \mathbb{P}(Y) = \frac{1+3}{2} = 2, \quad \sigma_X^2 = \frac{(5-3)^2}{12} = \frac{1}{3} = \frac{(3-1)^2}{12} = \sigma_Y^2.$$

Pertanto

$$\mathbb{P}(Z) = \mathbb{P}(X) + \mathbb{P}(Y) = 6; \quad \sigma_Z = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

3. Si ha

$$p = P(-4 \leq X \leq 0, 0 \leq Y \leq 4) = P(-4 \leq X \leq 0)P(0 \leq Y \leq 4),$$

con

$$\begin{aligned} P(-4 \leq X \leq 0) &= \Phi_{0,2}(0) - \Phi_{0,2}(-4) = \Phi(0) - \Phi(-2) = \\ &= \Phi(0) - (1 - \Phi(2)) \simeq 0.5 - 1 + 0.9772 = 0.4772; \end{aligned}$$

$$P(0 \leq Y \leq 4) = \Phi_{0,2}(4) - \Phi_{0,2}(0) = \Phi(2) - \Phi(0) \simeq 0.9772 - 0.5 = 0.4772;$$

quindi:  $p \simeq 0.4772^2 \simeq 0.2277$ .

4. Si ha

$$\gamma = P(E_2 E_3^c) = P(E_1 E_2 E_3^c) + P(E_1^c E_2 E_3^c) = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{2}{7};$$

$$\delta = P(E_1 | E_2^c E_3) = \frac{P(E_1 E_2^c E_3)}{P(E_2^c E_3)} = \frac{P(E_1 E_2^c E_3)}{P(E_1 E_2^c E_3) + P(E_1^c E_2^c E_3)} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6}} = \frac{1}{2}.$$

5. Si ha:  $X \sim H(8, 3, \frac{1}{2})$ , con  $X \in \{0, 1, 2, 3\}$ , e con

$$P(X = h) = \frac{\binom{4}{h} \binom{4}{3-h}}{\binom{8}{3}}, \quad h = 0, 1, 2, 3;$$

quindi

$$P(X = 0) = p_0 = \frac{1}{14}, \quad P(X = 1) = p_1 = \frac{6}{14}, \quad P(X = 2) = p_2 = \frac{6}{14}, \quad P(X = 3) = p_3 = \frac{1}{14}.$$

Pertanto

$$\varphi_X(t) = \mathbb{P}(e^{itX}) = \sum_{h=0}^3 p_h e^{ith} = \frac{1 + 6e^{it} + 6e^{2it} + e^{3it}}{14}.$$

6. Si ha  $h(x) = \frac{f(x)}{S(x)}$ , con

$$S(x) = \int_x^{+\infty} 9te^{-3t} dt = [-3te^{-3t}]_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty} 3e^{-3t} dt = 3xe^{-3x} + e^{-3x} = e^{-3x}(3x + 1).$$

Pertanto, per ogni  $x > 0$ , si ha:  $h(x) = \frac{9xe^{-3x}}{e^{-3x}(3x+1)} = \frac{9x}{3x+1}.$

7. Per la funzione di verosimiglianza si ha

$$\alpha(\theta | \mathbf{x}) = f(x_1 | \theta) \cdots f(x_6 | \theta) = \theta e^{-4\theta} \cdots \theta e^{-\theta} = \theta^6 e^{-21\theta}, \quad \theta \geq 0,$$

con  $\alpha(\theta | \mathbf{x}) = 0$  altrove. Allora, per la densità finale, si ha

$$\beta(\theta | \mathbf{x}) = k(\mathbf{x})\beta(\theta)\alpha(\theta | \mathbf{x}) = \cdots = k_1(\mathbf{x})\theta^7 e^{-24\theta}, \quad \theta \geq 0,$$

con  $\beta(\theta | \mathbf{x}) = 0$  altrove. Pertanto, la distribuzione finale è una densità di tipo Gamma (come quella iniziale), di parametri  $c = 8, \lambda = 24$  ( $k_1(\mathbf{x}) = \frac{24^8}{7!}$ ); quindi  $\mathbb{P}(\Theta | \mathbf{x}) = \frac{c}{\lambda} = \frac{1}{3}$ . Infatti

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Theta | \mathbf{x}) &= \int_0^{+\infty} \theta \frac{24^8}{7!} \theta^7 e^{-24\theta} d\theta = \frac{1}{7!} \cdot \frac{1}{24} \int_0^{+\infty} (24\theta)^8 e^{-24\theta} d(24\theta) = \\ &= \frac{1}{24 \cdot 7!} \int_0^{+\infty} x^8 e^{-x} dx = \frac{\Gamma(9)}{24 \cdot 7!} = \frac{8!}{24 \cdot 7!} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$