Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Latina* - 11/06/2010)

(il punteggio massimo si ottiene risolvendo correttamente 5 esercizi)

1. Dato un numero aleatorio X, con densità di probabilità $f(x) = a(x^2 - 1)$ per $x \in [1, 2]$, con $f(x) = 0$ altrove, calcolare la costante a e la funzione di ripartizione $F(x)$.

$$a = \qquad\qquad\qquad F(x) = \begin{cases} \\ \\ \end{cases}$$

2. Da un'urna, contenente 1 pallina bianca e 3 nere, si effettuano 3 estrazioni senza restituzione. Definiti gli eventi E_i = *"l'i-ma pallina estratta è bianca"*, $i = 1, 2, 3$, si ponga $X = |E_1| + |E_2|$, $Y = |E_2| + |E_3|$. Calcolare la covarianza di X, Y.
(*nota: indicare* $P(X = x, Y = y)$ con p_{xy}).

$$Cov(X, Y) =$$

3. Le lunghezze (in un'opportuna unità di misura) di due barre metalliche sono due numeri aleatori X, Y, con distribuzione di probabilità congiunta uniforme sull'insieme $\mathcal{C} = \{(x, y) : 1 \le x \le 3\,,\ 2 \le y \le 4\}$. Saldando le due barre si ottiene un'unica barra di lunghezza aleatoria $Z = X + Y$. Calcolare la previsione m_Z e lo scarto standard σ_Z di Z.

$$m_Z = \qquad\qquad\qquad \sigma_Z =$$

4. Un operatore forma un lotto L prelevando a caso 4 componenti da un altro lotto che contiene 5 pezzi buoni e 1 difettoso. Successivamente, l'operatore prende a caso dal lotto L due pezzi. Definiti gli eventi H = *"il componente difettoso è presente nel lotto L"*, E = *"i due pezzi scelti a caso dal lotto L sono entrambi buoni"*, calcolare $\gamma = P(H|E)$.

$$\gamma =$$

5. Un sistema S è costituito da due dispositivi in parallelo D_1 e D_2, che funzionano contemporaneamente. I tempi aleatori di durata dei due dispositivi sono due numeri aleatori X e Y, con $f(x, y) = 2e^{-2x-y}$ per $x \ge 0, y \ge 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare, per ogni $z > 0$, la funzione di rischio $h_Z(z)$ del tempo aleatorio Z di durata del sistema S.

$$h_Z(z) =$$

6. Dati 3 eventi scambiabili E_1, E_2, E_3, con $P(E_1) = \frac{1}{2}, P(E_1E_2) = \frac{2}{9}, P(E_1E_2E_3) = \frac{1}{12}$, calcolare le probabilità $\alpha = P(E_2^cE_3)$ e $\beta = P(E_2 \mid E_1^cE_3)$.

$$\alpha = \qquad\qquad\qquad \beta =$$

7. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione caratteristica del numero aleatorio $X = |E_1| + |E_2| + |E_3|$.

$$\varphi_X(t) =$$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 11/06/2010.

1. Dev'essere: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$; ovvero: $\int_1^2 a(x^2-1)dx = a\left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2 = \frac{4}{3}a = 1$; allora $a = \frac{3}{4}$. Quindi $f(x) = \frac{3}{4}(x^2-1)$, per $x \in [1,2]$, con $f(x) = 0$ altrove. Inoltre, ricordando che $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, si ha: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$, per $x \leq 1$; si ha: $F(x) = \int_1^x \frac{3}{4}(t^2-1)dt = \frac{x^3}{4} - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$, per $1 < x < 2$; si ha: $F(x) = 1$, per $x \geq 2$.

2. Si ha
$$X \in \{0,1\}\,,\; Y \in \{0,1\}\,,\; (X,Y) \in \{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}\,,\; XY \in \{0,1\}\,,$$
con $P(X=0) = P(E_1^c E_2^c) = \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{2} = P(X=1)$, e con
$$P(Y=0) = P(E_2^c E_3^c) = P(E_1 E_2^c E_3^c) + P(E_1^c E_2^c E_3^c) = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = P(Y=1)\,;$$
$$p_{00} = P(E_1^c E_2^c E_3^c) = \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\,,\quad p_{10} = P(E_1 E_2^c E_3^c) = \frac{1}{4}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{4}\,,$$
$$p_{01} = P(E_1^c E_2^c E_3) = \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\,,\quad p_{11} = P(E_1^c E_2 E_3^c) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{4}\,;$$
$$P(XY=0) = p_{00} + p_{10} + p_{01} = \frac{3}{4}\,,\; P(XY=1) = p_{11} = \frac{1}{4}\,.$$
Pertanto
$$I\!P(X) = 0\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = I\!P(Y)\,;\; I\!P(XY) = 0\cdot\frac{3}{4} + 1\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4}\,;$$
quindi: $Cov(X,Y) = I\!P(XY) - I\!P(X)I\!P(Y) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 0$.

3. L'area del quadrato $\mathcal{C}$ è 4; pertanto, si ha $f(x,y) = \frac{1}{4}$, per $(x,y) \in \mathcal{C}$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Si ha
$$f_1(x) = \int_2^4 \frac{1}{4}dy = \frac{1}{2}\,,\; x \in [1,3]\,,\; f_1(x) = 0\,,\; x \notin [1,3]\,;$$
$$f_2(y) = \int_1^3 \frac{1}{4}dx = \frac{1}{2}\,,\; y \in [2,4]\,,\; f_2(y) = 0\,,\; y \notin [2,4]\,.$$
Quindi X e Y sono stocasticamente indipendenti e con distribuzione uniforme nei rispettivi intervalli; allora
$$\mathbb{P}(X) = \frac{1+3}{2} = 2\,,\; \mathbb{P}(Y) = \frac{2+4}{2} = 3\,,\; \sigma_X^2 = \frac{(3-1)^2}{12} = \frac{1}{3} = \frac{(4-2)^2}{12} = \sigma_Y^2\,.$$
Pertanto
$$\mathbb{P}(Z) = \mathbb{P}(X) + \mathbb{P}(Y) = 5\,;\quad \sigma_Z = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,.$$

4. Si ha

$$P(H) = \frac{\binom{5}{3}\binom{1}{1}}{\binom{6}{4}} = \frac{2}{3}\,, \;\; P(E|H) = \frac{\binom{3}{2}\binom{1}{0}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{2}\,, \;\; P(E|H^c) = 1\,;$$

$$\gamma = \frac{P(H)P(E|H)}{P(H)P(E|H) + P(H^c)P(E|H^c)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot 1} = \frac{1}{2}\,.$$

5. Si ha: $Z = max\{X, Y\}$, con

$$P(Z \leq z) = F_Z(z) = P(X \leq z, Y \leq z) = \int_0^z \int_0^z 2e^{-2x-y}dxdy = \int_0^z 2e^{-2x}dx \int_0^z e^{-y}dy =$$

$$= (1 - e^{-2z})(1 - e^{-z}) = 1 - e^{-z} - e^{-2z} + e^{-3z}\,, \;\; z > 0\,.$$

Pertanto

$$f_Z(z) = e^{-z} + 2e^{-2z} - 3e^{-3z}\,, \;\; S_Z(z) = e^{-z} + e^{-2z} - e^{-3z}\,, \;\; z > 0\,;$$

quindi, per ogni $z > 0$, si ha

$$h_Z(z) = \frac{f_Z(z)}{S_Z(z)} = \frac{e^{-z} + 2e^{-2z} - 3e^{-3z}}{e^{-z} + e^{-2z} - e^{-3z}} = \frac{e^{2z} + 2e^{-z} - 3}{e^{2z} + e^{-z} - 1}\,.$$

6. Ricordiamo che: (i) per ogni coppia di eventi A, B, si ha $P(A^cB) = P(B) - P(AB)$; (ii) per l'ipotesi di scambiabilità si ha $P(E_i) = P(E_1), P(E_iE_j) = P(E_1E_2)$, per $i \neq j$. Allora

$$\alpha = P(E_2^cE_3) = P(E_3) - P(E_2E_3) = \frac{1}{2} - \frac{2}{9} = \frac{5}{18}\,;$$

inoltre

$$P(E_1^cE_2E_3) = P(E_2E_3) - P(E_1E_2E_3) = \frac{2}{9} - \frac{1}{12} = \frac{5}{36}\,; \quad P(E_1^cE_3) = P(E_2^cE_3) = \frac{5}{18}\,.$$

Pertanto

$$\beta = P(E_2 \,|\, E_1^cE_3) = \frac{P(E_1^cE_2E_3)}{P(E_1^cE_3)} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{5}{18}} = \frac{1}{2}\,.$$

7. Si ha $X \in \{0, 1, 2, 3\}$ e, tenendo conto che gli eventi sono scambiabili, si ha

$$P(X = 0) = p_0 = P(E_1^cE_2^cE_3^c) = 1 - P(E_1 \vee E_2 \vee E_3) = 1 - [3P(E_1) - 3P(E_1E_2) + P(E_1E_2E_3)] =$$

$$= 1 - 3\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot\frac{2}{9} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}\,;$$

$$P(X = 1) = p_1 = \cdots = 3P(E_1E_2^cE_3^c) = 3[P(E_1E_2^c) - P(E_1E_2^cE_3)] = 3\left(\frac{5}{18} - \frac{5}{36}\right) = \frac{5}{12}\,;$$

$$P(X = 2) = p_2 = \cdots = 3P(E_1E_2E_3^c) = 3[P(E_1E_2) - P(E_1E_2E_3)] = 3\left(\frac{2}{9} - \frac{1}{12}\right) = \frac{5}{12}\,;$$

$$P(X = 3) = p_3 = P(E_1E_2E_3) = \frac{1}{12}\,.$$

Pertanto

$$\varphi_X(t) = \mathbb{P}(e^{itX}) = \sum_{h=0}^{3} p_h e^{ith} = \frac{1 + 5e^{it} + 5e^{2it} + e^{3it}}{12}\,.$$