Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Latina* - 12/02/2010)
(il punteggio massimo si ottiene risolvendo correttamente 5 esercizi)

1. Da un'urna contenente 2 palline bianche e 4 nere si effettuano 3 estrazioni senza restituzione. Definiti gli eventi $E_i =$ *"l'i-ma pallina estratta è bianca"*, $i = 1, 2, 3$, calcolare la probabilità α dell'evento condizionato $(E_1 \vee E_2)|(E_2 \vee E_3)$.

   $\alpha =$

2. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione caratteristica del numero aleatorio $X = |E_1| + |E_2| + |E_3|$.

   $\varphi_X(t) =$

3. Un sistema S è costituito da due dispositivi in parallelo A e B, con B che entra in funzione nell'istante in cui si guasta A. I tempi aleatori X e Y di durata fino al guasto di A e B hanno una densità congiunta $f(x, y) = e^{-x-y}$, per $x \geq 0, y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Definiti gli eventi $H = (0 \leq X \leq 1, 0 \leq Y \leq 1)$, $E = (X + Y > 1)$, calcolare la probabilità p dell'evento condizionato $E|H$.

   $p =$

4. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la previsione m e lo scarto standard σ del tempo aleatorio T di durata fino al guasto di S.

   $m =$ $\sigma =$

5. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione di rischio $h_Z(z)$ del numero aleatorio $Z = \frac{T}{2}$, per ogni $z > 0$.

   $h_Z(z) =$

6. La densità di probabilità iniziale di un parametro aleatorio Θ è $\beta(\theta) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\theta^2}{18}}$; inoltre, per ogni fissato θ, le componenti di un campione casuale $X = (X_1, \ldots, X_4)$ sono stocasticamente indipendenti subordinatamente a θ e con distribuzione normale di parametri $m = \theta, \sigma = 2$; ovvero: $X_i|\theta \sim f(x_i|\theta) = N_{\theta,2}(x_i)$. Calcolare la probabilità p dell'evento condizionato $(-\frac{6}{\sqrt{10}} \leq \Theta \leq \frac{6}{\sqrt{10}} \,|\, \mathbf{x})$, assumendo $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_4) = (-2, -1, 1, 2)$.

   $p =$

7. Siano dati 2 lotti: L_1 contenente 4 pezzi buoni e 2 difettosi; L_2 contenente 1 pezzo buono e 5 difettosi. Scelto uno dei due lotti, L_1 (con probabilità p) oppure L_2 (con probabilità $1-p$), da esso si effettuano un numero aleatorio X di estrazioni con restituzione fino ad ottenere per la prima volta un pezzo buono. Definiti gli eventi $E = (X = 2)$, $H =$ *"le estrazioni sono state effettuate da L_1"*, calcolare per quale valore di p risulta $P(H|E) = 2P(H^c|E)$.

   $p =$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 12/02/2010.

1. Gli eventi sono scambiabili, con

$$P(E_i) = \frac{1}{3}\,,\ i = 1,2,3\,;\ P(E_1E_3) = P(E_2E_3) = P(E_1E_2) = \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{15}\,;$$

inoltre

$$(E_1 \vee E_2) \wedge (E_2 \vee E_3) = E_1E_2 \vee E_1E_3 \vee E_2 \vee E_2E_3 = E_2 \vee E_1E_3\,, \quad E_1E_2E_3 = \emptyset\,;$$

pertanto

$$\alpha = P[(E_1 \vee E_2)|(E_2 \vee E_3)] = \frac{P[(E_1 \vee E_2) \wedge (E_2 \vee E_3)]}{P(E_2 \vee E_3)} = \frac{P(E_2 \vee E_1E_3)]}{P(E_2 \vee E_3)} =$$

$$= \frac{P(E_2) + P(E_1E_3) - P(E_1E_2E_3)}{P(E_2) + P(E_3) - P(E_2E_3)} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{15}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{15}} = \frac{2}{3}\,.$$

2. Si ha $X \sim H(6, 3, \frac{1}{3})$, con $X \in \{0, 1, 2\}$ e, posto $P(X = h) = p_h$, risulta

$$p_0 = \frac{\binom{2}{0}\binom{4}{3}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{5}\,,\ \ p_1 = \frac{\binom{2}{1}\binom{4}{2}}{\binom{6}{3}} = \frac{3}{5}\,,\ \ p_2 = \frac{\binom{2}{2}\binom{4}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{5}\,;$$

pertanto: $\varphi_X(t) = \mathbb{P}(e^{itX}) = \sum_0^2 p_h e^{ith} = \frac{1}{5}(1 + 3e^{it} + e^{2it})$.

3. Posto $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,\ 1 - x \leq y \leq 1\}$, si ha $P(E|H) = \frac{P(EH)}{P(H)}$, con

$$P(EH) = \int\int_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_{1-x}^1 e^{-x-y}dy = e^{-1}\int_0^1 (1 - e^{-x})dx = e^{-2}\,,$$

$$P(H) = \int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^1 e^{-x-y}dxdy = \int_0^1 e^{-x}dx\int_0^1 e^{-y}dy = (1 - e^{-1})^2\,;$$

pertanto: $p = \frac{e^{-2}}{(1-e^{-1})^2} = (e - 1)^{-2} = \frac{1}{(e-1)^2}$.

4. Si ha $T = X + Y$ e per ogni fissato $t > 0$, indicando con G la funzione di ripartizione di T, risulta

$$G(t) = P(T \leq t) = P(X + Y \leq t) = \int_0^t dx \int_0^{t-x} e^{-x-y}dy =$$

$$= \int_0^t e^{-x}[-e^{-y}]_0^{t-x}dx = \int_0^t (e^{-x} - e^{-t})dx = \cdots = 1 - e^{-t} - te^{-t}\,;$$

allora: $G'(t) = g(t) = \cdots = te^{-t}\,,\ t \geq 0$, con $g(t) = 0$ altrove (distribuzione Gamma di parametri $c = 2, \lambda = 1$). Pertanto

$$m = \int_0^{+\infty} t\,g(t)dt = \int_0^{+\infty} t^2e^{-t}dt = \Gamma(3) = 2 = \frac{c}{\lambda}\,; \mathbb{P}(T^2) = \int_0^{+\infty} t^2\,g(t)dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} dt = \Gamma(4) = 3! = 6\,,\ \sigma^2 = \mathbb{P}(T^2) - [\mathbb{P}(T)]^2 = 2 = \frac{c}{\lambda^2}\,,\quad \sigma = \sqrt{2}\,.$$

(*Nota: in alternativa, si possono calcolare prima* $\mathbb{P}(X), \mathbb{P}(Y), \mathbb{P}(X^2), \mathbb{P}(Y^2), \mathbb{P}(XY)$, *e poi i valori* $m = \mathbb{P}(X) + \mathbb{P}(Y)\,,\ \sigma = \sqrt{Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)}$)

5. Indicando con F_Z la funzione di ripartizione di Z, per ogni $z > 0$ si ha

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(T \le 2z) = G(2z) = 1 - e^{-2z} - 2ze^{-2z}\,;$$

quindi

$$F'_Z(z) = f_Z(z) = \cdots = 4ze^{-2z}\,,\ z \ge 0\,,$$

con $f_Z(z) = 0$ altrove (distribuzione Gamma di parametri $c = 2, \lambda = 2$). Allora

$$S_Z(z) = P(Z > z) = 1 - F_Z(z) = 1 - (1 - e^{-2z} - 2ze^{-2z}) = e^{-2z} + 2ze^{-2z}\,,\quad z \ge 0\,;$$

pertanto

$$h_Z(z) = \frac{f_Z(z)}{S_Z(z)} = \frac{4ze^{-2z}}{e^{-2z} + 2ze^{-2z}} = \frac{4z}{1+2z}\,,\quad z \ge 0\,.$$

6. Osservando che $\Theta \sim N_{m_0,\sigma_0}$, con $m_0 = 0$, $\sigma_0 = 3$, e che $\overline{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_4}{4} = 0$, segue

$$\beta(\theta\,|\,\mathbf{x}) = k(\mathbf{x})\beta(\theta)\alpha(\mathbf{x}\,|\,\theta) = k(\mathbf{x})N_{0,3}(\theta)N_{\theta,2}(x_1)\cdots N_{\theta,2}(x_4) = \cdots = N_{m_4,\sigma_4}(\theta)\,,$$

con

$$m_4 = \frac{\frac{1}{\sigma_0^2}\,m_0 + \frac{4}{\sigma^2}\,\overline{x}}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{4}{\sigma^2}} = 0\,,\quad \frac{1}{\sigma_4^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{4}{\sigma^2} = \frac{1}{9} + \frac{4}{4} = \frac{10}{9}\,;$$

quindi: $\Theta\,|\,\mathbf{x} \sim N_{0,\frac{3}{\sqrt{10}}}$. Allora

$$p = P\left(-\frac{6}{\sqrt{10}} \le \Theta \le \frac{6}{\sqrt{10}}\ \mid\ \mathbf{x}\right) = \Phi_{0,\frac{3}{\sqrt{10}}}\left(\frac{6}{\sqrt{10}}\right) - \Phi_{0,\frac{3}{\sqrt{10}}}\left(\frac{6}{\sqrt{10}}\right) =$$

$$= \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1 \simeq 2 \times 0.9772 - 1 = 0.9544\,.$$

7. Si ha $P(H) = p\,,\ P(H^c) = 1 - p$; inoltre

$$P(E|H) = P(X = 2|H) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{9}\,,\ P(E|H^c) = P(X = 2|H^c) = \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{5}{36}\,;$$

quindi

$$P(E) = P(X = 2) = P(X = 2|H)P(H) + P(X = 2|H^c)P(H^c) = \frac{2}{9}p + \frac{5}{36}(1-p) = \frac{3p+5}{36}\,;$$

allora, tenendo conto che deve essere $P(H|E) = \frac{2}{3}$, segue

$$P(H|E) = \frac{P(EH)}{P(H)} = \frac{P(E|H)P(H)}{P(E)} = \frac{\frac{2}{9}\,p}{\frac{3p+5}{36}} = \frac{8p}{3p+5} = \frac{2}{3} \iff p = \frac{5}{9}\,.$$