Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Latina* - 15/01/2010)
(il punteggio massimo si ottiene risolvendo correttamente 5 esercizi)

1. Un lotto contenente 7 pezzi buoni e 1 difettoso viene diviso a caso in due lotti, A e B, di 4 componenti ciascuno; sia H l'evento *"il pezzo difettoso sta nel lotto A"*. Da ognuno dei lotti A e B si estrae a caso un pezzo che viene esaminato. Definiti gli eventi $E_1 =$ *"il pezzo estratto da A è buono"*, $E_2 =$ *"il pezzo estratto da B è buono"*, calcolare la probabilità p che il pezzo difettoso stia in A, supposto che gli eventi E_1, E_2 siano entrambi veri.

   $p =$

2. I tempi aleatori X e Y impiegati da due veicoli per percorrere un tratto di strada hanno una densità congiunta $f(x,y) = a(x+2y)$, per $(x,y) \in [0,2]\times[0,2]$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Calcolare il valore di a e la probabilità p dell'evento condizionato $(X \leq 1 \,|\, X \geq Y)$.

   $a =$ $\qquad\qquad$ $p =$

3. Un esperimento aleatorio consiste in 3 lanci di una moneta; sia E_i l'evento *"nell'i-mo lancio si ottiene Testa"*, $i = 1,2,3$. Assumendo E_1, E_2, E_3 indipendenti ed equiprobabili, di probabilità $p > 0$ e posto $A = E_1 \vee E_2$, $B = E_2 \vee E_3$, $C = E_1 \vee E_3$, calcolare la probabilità α dell'evento condizionato $A|(B \vee C)$.

   $\alpha =$

4. Dati due numeri aleatori X e Y, indipendenti e con $X \sim H(4,2,\frac{1}{2})$, $Y \sim H(4,2,\frac{1}{2})$, calcolare la probabilità α dell'evento condizionato $(X = 1 \,|\, X + Y = 2)$.

   $\alpha =$

5. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione caratteristica del numero aleatorio $Z = X + Y$.

   $\varphi_Z(t) =$

6. La funzione di rischio di un numero aleatorio continuo X non negativo è $h(x) = 2x$, per $x \geq 0$, con $h(x) = 0$ altrove. Determinare la previsione e la varianza di X.

   $\mathbb{P}(X) =$ $\qquad\qquad$ $Var(X) =$

7. La densità di probabilità iniziale di un parametro aleatorio Θ è $\beta(\theta) = e^{-\theta}$, per $\theta > 0$, con $\beta(\theta) = 0$; inoltre, per ogni fissato $\theta > 0$, le componenti di un campione casuale $X = (X_1, \ldots, X_4)$ sono stocasticamente indipendenti subordinatamente a θ e con distribuzione esponenziale di parametro θ; ovvero: $X_i|\theta \sim f(x_i|\theta) = \theta e^{-\theta x_i}$, $x_i \geq 0$. Determinare la previsione di $\Theta|\mathbf{x}$, con $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ e con $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = t$.

   $\mathbb{P}(\Theta|\mathbf{x}) =$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 15/01/2010.

1. Si ha $P(H) = \frac{\binom{1}{1}\binom{7}{3}}{\binom{8}{4}} = \frac{1}{2} = P(H^c)$; inoltre

$$P(E_1E_2 \,|\, H) = P(E_1 \,|\, H)P(E_2 \,|\, H) = \frac{3}{4}\cdot 1 = \frac{3}{4};\ P(E_1E_2 \,|\, H^c) = P(E_1 \,|\, H^c)P(E_2 \,|\, H^c) = 1\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{4};$$

quindi

$$P(E_1E_2) = P(E_1E_2 \,|\, H)P(H) + P(E_1E_2 \,|\, H^c)P(H^c) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4}\,;$$

pertanto

$$p = P(H \,|\, E_1E_2) = \frac{P(E_1E_2 \,|\, H)P(H)}{P(E_1E_2)} = P(H) = \frac{1}{2}\,.$$

2. Si ha

$$\int_0^2 dx \int_0^2 a(x+2y)\,dy = a\int_0^2 (2x+4)\,dx = 12a = 1\,;$$

pertanto: $a = \frac{1}{12}$. Inoltre $p = P(X \leq 1 \,|\, X \geq Y) = \frac{P(X\leq 1, X\geq Y)}{P(X\geq Y)}$, con

$$P(X \leq 1, X \geq Y) = \int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{12}(x+2y)\,dy = \frac{1}{12}\int_0^1 2x^2\,dx = \frac{1}{18}\,,$$

$$P(X \geq Y) = \int_0^2 dx \int_0^x \frac{1}{12}(x+2y)\,dy = \frac{1}{12}\int_0^2 2x^2\,dx = \frac{4}{9}\,;$$

pertanto: $p = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{8}$.

3. Osservando che

$$AB = (E_1 \vee E_2) \wedge (E_2 \vee E_3) = (E_1E_3 \vee E_2)\,,\ AC = (E_1 \vee E_2) \wedge (E_1 \vee E_3) = (E_2E_3 \vee E_1)\,,$$

$$AB \vee AC = E_1 \vee E_2\,,\ B \vee C = E_1 \vee E_2 \vee E_3\,,$$

segue

$$\alpha = \frac{P[A \wedge (B \vee C)]}{P(B \vee C)} = \frac{P(AB \vee AC)}{P(B \vee C)} = \frac{P(E_1 \vee E_2)}{P(E_1 \vee E_2 \vee E_3)} = \frac{1 - P(E_1^cE_2^c)}{1 - P(E_1^cE_2^cE_3^c)} =$$

$$= \frac{1-(1-p)^2}{1-(1-p)^3} = \cdots = \frac{2-p}{3-3p+p^2}\,.$$

4. Si ha $\alpha = \frac{P(X=1, X+Y=2)}{P(X+Y=2)}$, con

$$P(X=1, X+Y=2) = P(X=1, Y=1) = P(X=1)P(Y=1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}} \cdot \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}\,,$$

$$P(X+Y=2) = P(X=0, Y=2) + P(X=1, Y=1) + P(X=2, Y=0) =$$
$$= \frac{\binom{2}{0}\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} \cdot \frac{\binom{2}{2}\binom{2}{0}}{\binom{4}{2}} + \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}} \cdot \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}} + \frac{\binom{2}{2}\binom{2}{0}}{\binom{4}{2}} \cdot \frac{\binom{2}{0}\binom{2}{2}}{\binom{24}{2}} = \frac{1+16+1}{36} = \frac{1}{2}\,;$$

pertanto: $\alpha = \frac{8}{9}$.

5. Dall'esercizio precedente, si ha

$$P(X=0) = P(Y=0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6}\,,\; P(X=1) = P(Y=1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{4}{6}\,,$$

$$P(X=2) = P(Y=2) = \frac{1}{6}\,;$$

pertanto, ricordando che X e Y sono stocasticamente indipendenti, segue

$$\varphi_X(t) = \varphi_Y(t) = \frac{1+4e^{it}+e^{2it}}{6}\,;\;\; \varphi_Z(t) = \varphi_X(t)\cdot\varphi_Y(t) = \frac{(1+4e^{it}+e^{2it})^2}{36}\,.$$

6. Si ha $S(x) = e^{-\int_0^x h(t)dt} = e^{-x^2}$, $x \geq 0$; quindi, per $x \geq 0$ si ha $f(x) = h(x)S(x) = 2x\,e^{-x^2}$, con $f(x) = 0$ altrove. Allora, osservando che

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{2\pi}\sigma \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx = \sqrt{2\pi}\sigma \cdot \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} N_{0,\sigma}(x)dx = \sqrt{2\pi}\sigma \cdot \frac{1}{2}\,,$$

con $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$, segue

$$I\!P(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} 2x^2e^{-x^2}dx = [-xe^{-x^2}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx =$$
$$= \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

Inoltre

$$I\!P(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx = \int_0^{+\infty} 2x^3e^{-x^2}dx = [-x^2e^{-x^2}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2xe^{-x^2}dx =$$
$$= \int_0^{+\infty} f(x)dx = 1\,;$$

pertanto: $Var(X) = I\!P(X^2) - [I\!P(X)]^2 = 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{4-\pi}{4}$.

7. La densità di probabilità finale è $\beta(\theta|\mathbf{x}) = k(\mathbf{x})\beta(\theta)\alpha(\mathbf{x}|\theta)$, con

$$\alpha(\mathbf{x}|\theta) = f(x_1|\theta)f(x_2|\theta)f(x_3|\theta)f(x_4|\theta) = \theta^4e^{-t\theta}\,,\;\; \theta > 0\,;$$

pertanto

$$\beta(\theta|\mathbf{x}) = k(\mathbf{x})\theta^4e^{-(t+1)\theta} = G_{5,t+1}(\theta)\,,\;\; \theta > 0\,;$$

ovvero, la distribuzione finale di Θ è una Gamma di parametri $c = 5, \lambda = t+1$. Pertanto: $\mathbb{P}(\Theta|\mathbf{x}) = \frac{c}{\lambda} = \frac{5}{t+1}$.