Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Latina* - 15/7/2010)

(il punteggio massimo si ottiene risolvendo correttamente 5 esercizi)

1. Da un gruppo di 5 studenti, dei quali 2 sanno risolvere un certo quesito, ne vengono estratti a caso 3. Successivamente, il quesito viene sottoposto ad uno dei 3 studenti (scelto a caso). Siano definiti gli eventi H_r = *"fra i 3 studenti estratti a caso ve ne sono r che sanno risolvere il quesito"*, $r = 0, 1, 2$; A = *"lo studente scelto a caso non sa risolvere il quesito"*. Supposto vero A, calcolare la probabilità condizionata p che almeno uno dei rimanenti 2 studenti sappia risolvere il quesito.

   $p =$

2. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è $f(x, y) = ke^{-x-y}$, per $x \geq 0$, $y \geq 2x$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante k, la previsione di X e la previsione di Y.

   $k =$ $\quad\quad$ $\mathbb{P}(X) =$ $\quad\quad$ $\mathbb{P}(Y) =$

3. Con riferimento all'esercizio precedente, stabilire se X e Y sono incorrelati e calcolare la probabilità p dell'evento $(Y \leq 2) \wedge (X + Y \leq 3)$.

   X, Y *incorrelati?* $\quad\quad$ $p =$

4. Con riferimento all'esercizio 2, calcolare la funzione di rischio $h_Z(z)$ del numero aleatorio $Z = Y - X$, per ogni $z > 0$.

   $h_Z(z) =$

5. Da un'urna, contenente inizialmente 3 palline bianche e 3 nere, si effettuano 3 estrazioni a caso, togliendo ogni volta una pallina e sostituendola con una di colore opposto. Definiti gli eventi E_i = *"l'i-ma pallina estratta è bianca"*, $i = 1, 2, 3$, stabilire se E_1, E_2, E_3 sono equiprobabili.

   E_1, E_2, E_3 *equiprobabili?*

6. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione caratteristica $\varphi(t)$ del numero aleatorio $X = |E_1| + |E_2| + |E_3|$.

   $\varphi(t) =$

7. La distribuzione iniziale di un numero aleatorio Θ è normale con parametri $m_0 = 1$, $\sigma_0 = 3$. Le componenti di un campione casuale (X_1, X_2, X_3), subordinatamente ad ogni fissato valore θ di Θ, hanno una distribuzione normale con valor medio θ e scarto standard $\sigma = 1$. Supposto di aver osservato un campione casuale $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, con $x_1 + x_2 + x_3 = 3$, stabilire per quale valore θ_0 risulta $P(\Theta > \theta_0 \mid \mathbf{x}) = \Phi(2)$.

   $\theta_0 =$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 15/7/2010.

1. Si ha: $P(H_r) = \frac{\binom{2}{r}\binom{3}{3-r}}{\binom{5}{3}}$, $r = 0, 1, 2$; quindi

$$P(H_0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{3}{3}}{\binom{5}{3}} = \frac{1}{10}\,, \quad P(H_1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{2}}{\binom{5}{3}} = \frac{6}{10}\,, \quad P(H_2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{3}{1}}{\binom{5}{3}} = \frac{3}{10}\,;$$

inoltre: $P(A|H_0) = 1$, $P(A|H_1) = \frac{2}{3}$, $P(A|H_2) = \frac{1}{3}$. Allora

$$P(A) = P(A|H_0)P(H_0) + P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) = 1 \cdot \frac{1}{10} + \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{5}\,;$$

pertanto: $p = P(H_1 \vee H_2|A) = 1 - P(H_0|A) = 1 - \frac{P(A|H_0)P(H_0)}{P(A)} = 1 - \frac{1 \cdot \frac{1}{10}}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{6}\,.$

2. Dev'essere $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dxdy = 1$; quindi

$$k \int_0^{+\infty} dx \int_{2x}^{+\infty} e^{-x-y}dy = k \int_0^{+\infty} e^{-x}dx \int_{2x}^{+\infty} e^{-y}dy = k \int_0^{+\infty} e^{-3x}dx = \frac{k}{3} = 1\,;$$

pertanto: $k = 3$. Inoltre

$$f_1(x) = \int_{2x}^{+\infty} 3e^{-x-y}dy = 3e^{-x} \int_{2x}^{+\infty} e^{-y}dy = 3e^{-3x}\,,\ x \geq 0\,,$$

con $f_1(x) = 0$ altrove; ovvero, X ha una distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 3$; quindi: $I\!P(X) = \frac{1}{3}$. Infine

$$f_2(y) = \int_0^{\frac{y}{2}} 3e^{-x-y}dx = 3e^{-y} \int_0^{\frac{y}{2}} e^{-x}dx = 3e^{-y}(1 - e^{-\frac{y}{2}})\,,\ y \geq 0\,,$$

con $f_2(y) = 0$ altrove. Allora

$$I\!P(Y) = \int_0^{+\infty} 3ye^{-y}(1 - e^{-\frac{y}{2}})dy = 3 \int_0^{+\infty} ye^{-y}dy - 2 \int_0^{+\infty} y \cdot \frac{3}{2}\, e^{-\frac{3}{2}y}dy = 3 - 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{3}\,.$$

3. Osservando che

$$\int_0^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}\,, \quad \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda^2}\,,\ \forall\, \lambda > 0\,,$$

$$\int_{2x}^{+\infty} ye^{-y}dy = [-ye^{-y}]_{2x}^{+\infty} + \int_{2x}^{+\infty} e^{-y}dy = 2xe^{-2x} + e^{-2x}\,,$$

segue

$$I\!P(XY) = \int_0^{+\infty} dx \int_{2x}^{+\infty} 3xye^{-x-y}dy = \int_0^{+\infty} \left(3xe^{-x} \int_{2x}^{+\infty} ye^{-y}dy\right) dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} 3xe^{-x}(2xe^{-2x} + e^{-2x})dx = 2\int_0^{+\infty} x^2 \cdot 3e^{-3x}dx + \int_0^{+\infty} x \cdot 3e^{-3x}dx =$$

$$= 2 \cdot \frac{2}{3^2} + \cdot\frac{1}{3} = \frac{7}{9} \neq \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{3} = I\!\!P(X)I\!\!P(Y)\,;$$

quindi X e Y sono correlati.
Inoltre, osservando che l'evento $(Y \leq 2) \wedge (X + Y \leq 3)$ coincide con l'evento $(X, Y) \in A$, dove $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 2x \leq y \leq 2\}$, segue

$$p = P[(X, Y) \in A] = \int\int_A f(x, y)dxdy = \int_0^1 dx \int_{2x}^2 3e^{-x-y}dy = \int_0^1 3e^{-x}dx \int_{2x}^2 e^{-y}dy =$$

$$= \int_0^1 3e^{-x}(e^{-2x} - e^{-2})dx = \int_0^1 3e^{-3x}dx - 3e^{-2}\int_0^1 e^{-x}dx = \cdots = 1 - 3e^{-2} + 2e^{-3} \simeq 0.6936\,.$$

4. Fissato $z > 0$, si ha $h_Z(z) = -\frac{S'_Z(z)}{S_Z(z)}$, con $S_Z(z) = 1 - F_Z(z)$ e con

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(Y - X \leq z) = P(Y \leq X + z) = P[(X, Y) \in A]\,,$$

dove $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq z, 2x \leq y \leq x + z\}$. Pertanto

$$F_Z(z) = \int_0^z dx \int_{2x}^{x+z} 3e^{-x-y}dy = \int_0^z 3e^{-x}(e^{-2x} - e^{-x-z})dx =$$

$$= \int_0^z 3e^{-3x}dx - \frac{3}{2}e^{-z}\int_0^z 2e^{-2x}dx = 1 - e^{-3z} - \frac{3}{2}e^{-z}(1 - e^{-2z}) = 1 - \frac{3}{2}e^{-z} + \frac{1}{2}e^{-3z}\,.$$

Allora $S_Z(z) = \frac{3}{2}e^{-z} - \frac{1}{2}e^{-3z}$, $\quad S'_Z(z) = -\frac{3}{2}e^{-z} + \frac{3}{2}e^{-3z}$; pertanto, pr ogni $z > 0$, si ha: $h_Z(z) = \frac{\frac{3}{2}e^{-z} - \frac{3}{2}e^{-3z}}{\frac{3}{2}e^{-z} - \frac{1}{2}e^{-3z}} = \frac{3e^{2z} - 3}{3e^{2z} - 1}$.

5. Si ha $P(E_1) = \frac{1}{2}$, inoltre

$$P(E_2) = P(E_1E_2) + P(E_1^cE_2) = P(E_1)P(E_2|E_1) + P(E_1^c)P(E_2|E_1^c) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{1}{2}\,,$$

$$P(E_3) = P(E_1E_2E_3) + P(E_1E_2^cE_3) + P(E_1^cE_2E_3) + P(E_1^cE_2^cE_3) = \cdots =$$

$$= \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{2}\,.$$

Pertanto: $P(E_1) = P(E_2) = P(E_3)$.

6. Si ha $X \in \{0, 1, 2, 3\}$, con $P(X = 0) = P(E_1^cE_2^cE_3^c) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = P(E_1E_2E_3) = P(X = 3)$; inoltre,

$$P(X = 1) = P(E_1E_2^cE_3^c) + P(E_1^cE_2E_3^c) + P(E_1^cE_2^cE_3) = \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{17}{36}\,,$$

$$P(X = 2) = P(E_1E_2E_3^c) + P(E_1E_2^cE_3) + P(E_1^cE_2E_3) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{17}{36}\,.$$

Pertanto: $\varphi(t) = \sum_{h=0}^{3} p_h\, e^{itx_h} = \frac{1 + 17e^{it} + 17e^{2it} + e^{3it}}{36}$.

7. Si ha $\Theta \mid \mathbf{x} \sim N_{m_3,\sigma_3}$, con $m_3 = 1$ in quanto $\overline{x} = m_0 = 1$. Inoltre $\frac{1}{\sigma_3^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{3}{\sigma^2} = \frac{1}{9} + 3 = \frac{28}{9}$ e quindi $\sigma_3 = \frac{3}{2\sqrt{7}}$. Pertanto $\Theta \mid \mathbf{x} \sim N_{1,\frac{3}{2\sqrt{7}}}$. Allora

$$P(\Theta > \theta_0 \mid \mathbf{x}) = 1 - \Phi_{1,\frac{3}{2\sqrt{7}}}(\theta_0) = 1 - \Phi\left(\frac{\theta_0 - 1}{\frac{3}{2\sqrt{7}}}\right) = \Phi(2) \iff \frac{\theta_0 - 1}{\frac{3}{2\sqrt{7}}} = -2 \iff \theta_0 = \frac{\sqrt{7} - 3}{\sqrt{7}}\,.$$