Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Latina* - 17/9/2010)

(il punteggio massimo si ottiene risolvendo correttamente 5 esercizi)

1. Tizio e Caio partecipano a un gioco in cui ci sono 8 buste chiuse, delle quali 2 sono abbinate alla vincita di una somma S. Il conduttore divide a caso le 8 buste in 2 gruppi L_1 ed L_2, con L_1 contenente 5 buste ed L_2 contenente 3 buste. Tizio estrae a caso una busta da L_1, mentre Caio estrae a caso una busta da L_2. Definiti gli eventi $H_r =$ "r delle 5 buste contenute in L_1 sono vincenti", $r = 0, 1, 2$, $A =$ *"la busta estratta da Tizio è vincente"*, $B =$ *"la busta estratta da Caio è vincente"*, verificare se $P(A) = P(B)$.

   $P(A) = P(B)$?

2. Un circuito elettrico tollera senza bruciarsi una intensità di corrente non superiore a 1.5 ampere. In tempi successivi il circuito è attraversato da 2 correnti di intensità aleatorie X e Y, con una densità di probabilità congiunta $f(x, y) = \frac{(2-x)(2-y)}{4}$, per $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Definiti gli eventi $A = (X \leq 1.5)$, $B = (Y \leq 1.5)$, $H = (X + Y \geq 2)$, calcolare la probabilità p dell'evento condizionato $AB \,|\, H$.

   $p =$

3. Con riferimento all'esercizio precedente, stabilire se X e Y sono stocasticamente indipendenti e calcolare la covarianza della coppia $(X + Y, X - Y)$.

   X, Y *indipendenti*? $Cov(X + Y, X - Y) =$

4. Siano dati 3 numeri aleatori X_1, X_2, X_3, stocasticamente indipendenti e con distribuzione di Poisson di parametro $\lambda = 1$. Posto $Y = X_1 + X_2 + X_3$, calcolare la previsione m e lo scarto quadratico medio σ di Y; inoltre, calcolare la probabilità α dell'evento condizionato $(Y = 0 \,|\, Y \leq 1)$.

   $m =$ $\sigma =$ $\alpha =$

5. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è $f(x, y) = 6e^{-x-2y}$, per $x \geq 0$, $y \geq x$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare, per ogni $z > 0$, la funzione di rischio $h_Z(z)$ del numero aleatorio (non negativo) $Z = Y - X$.

   $h_Z(z) =$

6. Siano dati 6 numeri aleatori $X_1, \ldots, X_6$, indipendenti ed ugualmente distribuiti, con funzione caratteristica $\varphi(t) = e^{2it-3t^2}$. Calcolare la previsione μ_Z e lo scarto quadratico medio σ_Z del numero aleatorio $Z = \frac{X_1+\cdots+X_6}{6}$.

   $\mu_Z =$ $\sigma_Z =$

7. In un lotto, formato da 4 componenti, i pezzi sono tutti buoni (ipotesi H), oppure 3 buoni e 1 difettoso (ipotesi H^c). Dal lotto si prelevano a caso, senza restituzione, 3 componenti che vengono esaminati. Definiti gli eventi $E_i =$ *"l'i-mo pezzo esaminato è non difettoso"*, $i = 1, 2, 3$, stabilire se gli eventi E_1, E_2, E_3 sono scambiabili; inoltre, assumendo $P(H) = P(H^c)$, calcolare la probabilità condizionata $p = P(E_2|E_1E_3)$.

   E_1, E_2, E_3 *scambiabili* ? $p =$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 17/9/2010.

1. Si ha $P(H_r) = \frac{\binom{2}{r}\binom{6}{5-r}}{\binom{8}{5}}$, $r = 0, 1, 2$; quindi: $P(H_0) = \frac{3}{28}$, $P(H_1) = \frac{15}{28}$, $P(H_2) = \frac{10}{28}$; inoltre: $P(A|H_0) = P(B|H_2) = 0$, $P(A|H_1) = \frac{1}{5}$, $P(B|H_1) = \frac{1}{3}$, $P(A|H_2) = \frac{2}{5}$, $P(B|H_0) = \frac{2}{3}$. Allora: $P(A) = P(A|H_0)P(H_0) + P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) = = \cdots = \frac{1}{4}$, $P(B) = P(B|H_0)P(H_0) + P(B|H_1)P(H_1) + P(B|H_2)P(H_2) = \cdots = \frac{1}{4}$; pertanto: $P(A) = P(B)$.

2. Si ha: $AB = \left(X \leq \frac{3}{2}, Y \leq \frac{3}{2}\right)$, $P(AB \mid H) = \frac{P(ABH)}{P(H)}$, con

$$P(H) = \int_0^2 dx \int_{2-x}^2 \frac{(2-x)(2-y)}{4} dy = \frac{1}{4} \int_0^2 (2-x) \left[2y - \frac{1}{2}y^2\right]_{2-x}^2 dx =$$

$$= \cdots = \frac{1}{8} \int_0^2 (2x^2 - x^3) dx = \cdots = \frac{1}{6},$$

$$P(ABH) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} dx \int_{2-x}^{\frac{3}{2}} \frac{(2-x)(2-y)}{4} dy = \frac{1}{4} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} (2-x) \left[2y - \frac{1}{2}y^2\right]_{2-x}^{\frac{3}{2}} dx =$$

$$= \cdots = \frac{1}{8} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(2x^2 - x^3 - \frac{1}{2} + \frac{x}{4}\right) dx = \cdots = \frac{1}{12};$$

pertanto: $p = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{2}$.

3. Si ha

$$f_1(x) = \int_0^2 \frac{(2-x)(2-y)}{4} dy = \frac{2-x}{2} \int_0^2 \frac{2-y}{2} dy = \cdots = \frac{2-x}{2}, \quad 0 \leq x \leq 2,$$

con $f_1(x) = 0$ altrove; inoltre

$$f_2(y) = \int_0^2 \frac{(2-x)(2-y)}{4} dx = \frac{2-y}{2} \int_0^2 \frac{2-x}{2} dx = \cdots = \frac{2-y}{2}, \quad 0 \leq y \leq 2,$$

con $f_2(y) = 0$ altrove. Pertanto $f(x,y) = f_1(x) f_2(y)$, ovvero X e Y sono indipendenti, e quindi $Cov(X,Y) = 0$; inoltre, $f_1 = f_2$ e in particolare si ha $Var(X) = Var(Y)$. Allora

$$Cov(X+Y, X-Y) = Cov(X,X) - Cov(X,Y) + Cov(Y,X) - Cov(Y,Y) = Var(X) - Var(Y) = 0.$$

4. Si ha $\mathbb{P}(X_i) = Var(X_i) = 1$, $i = 1, 2, 3$, quindi

$$m = \mathbb{P}(Y) = \sum_{i=1}^3 \mathbb{P}(X_i) = 3, \; \sigma = \sqrt{Var(Y)} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 Var(X_i)} = \sqrt{3};$$

inoltre, osservando che $P(X_i = h) = \frac{\lambda^h}{h!}\, e^{-\lambda} = \frac{e^{-1}}{h!}$, $h = 0, 1, \ldots$, posto $P(Y = k) = p_k$, segue

$$p_0 = P(X_1 = 0,\, X_2 = 0,\, X_3 = 0) = e^{-1}e^{-1}e^{-1} = e^{-3}\,,$$

$$p_1 = P(X_1 = 1,\, X_2 = 0,\, X_3 = 0) + P(X_1 = 0,\, X_2 = 1,\, X_3 = 0) + P(X_1 = 0,\, X_2 = 0,\, X_3 = 1) =$$
$$= e^{-1}e^{-1}e^{-1} + e^{-1}e^{-1}e^{-1} + e^{-1}e^{-1}e^{-1} = 3e^{-3}\,;$$

pertanto

$$\alpha = P(Y = 0\,|\,Y \leq 1) = \frac{P(Y = 0,\, Y \leq 1)}{P(Y \leq 1)} = \frac{P(Y = 0)}{P(Y \leq 1)} = \frac{p_0}{p_0 + p_1} = \frac{1}{4}\,.$$

5. Per ogni $z > 0$, ricordando che $Y \geq X$, si ha

$$P(Z \leq z) = F_Z(z) = P(Y \leq X + z) = P(X \leq Y \leq X + z) = \int_0^{+\infty} dx \int_x^{x+z} f(x, y)dy =$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(3e^{-x} \int_x^{x+z} 2e^{-2y} dy \right) dx = \int_0^{+\infty} 3e^{-x}[e^{-2x} - e^{-2(x+z)}]dx = \int_0^{+\infty} 3e^{-3x}(1 - e^{-2z})dx =$$

$= 1 - e^{-2z}$; quindi

$$f_Z(z) = F'_Z(z) = 2e^{-2z}\,, \quad S_Z(z) = 1 - F_Z(z) = e^{-2z}\,, \quad h_Z(z) = \frac{f_Z(z)}{S_Z(z)} = 2\,.$$

6. Indicando con m e σ la previsione e lo scarto quadratico medio di X_h, $h = 1, \ldots, 6$, si ha

$$\mu_Z = \mathbb{P}(Z) = \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_6}{6} \right) = \frac{\mathbb{P}(X_1) + \cdots + \mathbb{P}(X_6)}{6} = m\,;$$

inoltre, essendo $Cov(X_h, X_j) = 0$ per $h \neq j$, si ha

$$Var(Z) = \sigma_Z^2 = Var\left(\frac{X_1 + \cdots + X_6}{6} \right) = \left(\frac{Var(X_1) + \cdots + Var(X_6)}{36} \right) = \frac{\sigma^2}{6}\,.$$

Infine, ricordando la relazione $\mathbb{P}(X_h^k) = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{i^k}$ e osservando che

$$\varphi'(t) = e^{2it - 3t^2}(2i - 6t)\,, \quad \varphi''(t) = \cdots = e^{2it - 3t^2}(36t^2 - 24it - 10)\,,$$

e quindi: $\varphi'(0) = 2i = i\mathbb{P}(X_h) = im\,,\quad \varphi''(0) = -10 = i^2\mathbb{P}(X_h^2) = -(m^2 + \sigma^2)$, segue $m = 2\,,\ \sigma^2 = 6$. Pertanto $\mu_Z = 2\,,\ \sigma_Z = 1$.
(*Metodo alternativo: si può osservare che* $X_h \sim N_{2,\sqrt{6}}$, *quindi...*)

7. Nelle estrazioni, con o senza restituzione, da un'urna di composizione nota o incognita si dimostra che gli eventi E_i sono scambiabili, con

$$P(E_i) = P(E_1) = \sum_r P(E_1|H_r)P(H_r)\,, \quad P(E_iE_j) = P(E_1E_2) = \sum_r P(E_1E_2|H_r)P(H_r)\,, \quad \ldots\,,$$

dove H_r rappresenta l'ipotesi che nel lotto ci siano r pezzi difettosi. Pertanto gli eventi E_1, E_2, E_3 sono scambiabili. Inoltre, essendo $P(H) = P(H^c) = \frac{1}{2}$, segue

$$P(E_1E_2E_3) = P(E_1E_2E_3|H)P(H) + P(E_1E_2E_3|H^c)P(H^c) = 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8}\,,$$

$$P(E_1E_3) = P(E_1E_2) = P(E_1E_2|H)P(H) + P(E_1E_2|H^c)P(H^c) = 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}\,.$$

Allora: $p = P(E_2|E_1E_3) = \frac{P(E_1E_2E_3)}{P(E_1E_3)} = \frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{5}{6}$.