Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Latina* - 20/11/2010)

(il punteggio massimo si ottiene risolvendo correttamente 5 esercizi)

1. Un lotto di composizione incognita contiene 5 pezzi, dei quali al massimo 1 è difettoso. Definito l'evento $H =$ *"il lotto non contiene pezzi difettosi"*, si assumano equiprobabili H e H^c. Tizio e Caio prelevano a caso dal lotto un pezzo ciascuno. Definiti gli eventi $E_1 =$ *"il pezzo prelevato da Tizio è difettoso"*, $E_2 =$ *"il pezzo prelevato da Caio è difettoso"*, calcolare la probabilità condizionata $p = P(E_1|E_2^c)$.

   $p =$

2. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione di ripartizione $F(x)$, per ogni $x \in [0,1)$, e la funzione caratteristica $\varphi(t)$ del numero aleatorio $X = |E_1| + |E_2|$.

   $F(x) =$ $\qquad\qquad$ $\varphi(t) =$

3. Un numero aleatorio continuo X ha una densità di probabilità $f(x) = x$ nell'intervallo $[0,1]$, $f(x) = 4 - x$ nell'intervallo $(3,4]$, con $f(x) = 0$ altrove. Determinare la previsione m di X e la probabilità p dell'evento condizionato $(X > 2 \,|\, \frac{1}{2} \leq X \leq \frac{7}{2})$.

   $m =$ $\qquad\qquad$ $p =$

4. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X,Y) è $f(x,y) = (y - x)$, per $(x,y) \in [0,1] \times [1,2]$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Calcolare: (i) il valore $y_0 \in (1,2)$ tale che $P(Y \leq y_0) = \frac{1}{2}$; (ii) la probabilità p dell'evento $X + Y > 2$.

   $y_0 =$ $\qquad\qquad$ $p =$

5. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la covarianza della coppia $(4X, -3Y)$.

   $Cov(4X, -3Y) =$

6. La densità congiunta di un vettore aleatorio (X,Y) è $f(x,y) = x^2 e^{-x-2y}$, per $x \geq 0, y \geq 0$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Calcolare, per ogni $x > 0$, la funzione di rischio di X.

   $h_1(x) =$

7. La distribuzione iniziale di un numero aleatorio Θ è normale con parametri $m_0 = 0,\ \sigma_0 = 2$. Le componenti di un campione casuale $(X_1, \cdots, X_4)$, subordinatamente ad ogni fissato valore θ di Θ, hanno una distribuzione normale con valor medio θ e scarto standard $\sigma = 1$. Supposto di aver osservato un campione casuale $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_4)$, con $x_1 + \cdots + x_4 = 0$, stabilire per quale valore θ_0 risulta $P(-2\theta_0 \leq \Theta \leq 2\theta_0 \mid \mathbf{x}) = 2\Phi(2) - 1$.

   $\theta_0 =$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 20/11/2010.

1. Si ha $P(H) = P(H^c) = \frac{1}{2}$; $P(E_1|H) = P(E_2|H) = 0$, $P(E_1|H^c) = P(E_2|H^c) = \frac{1}{5}$. Allora
$$P(E_1) = P(E_2) = 0 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10}\,;$$
inoltre $P(E_1E_2^c|H) = 0$, $P(E_1E_2^c|H^c) = P(E_1|H^c)P(E_2^c|E_1H^c) = \frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{1}{5}$, quindi
$$P(E_1E_2^c) = P(E_1E_2^c|H)P(H) + P(E_1E_2^c|H^c)P(H^c) = 0 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10}\,.$$
Pertanto
$$p = P(E_1|E_2^c) = \frac{P(E_1E_2^c)}{P(E_2^c)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{9}\,.$$

2. Si ha $X \in \{0,1\}$, con
$$P(X=0) = P(E_1^cE_2^c) = P(E_1^cE_2^c|H)P(H) + P(E_1^cE_2^c|H^c)P(H^c) = 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{5}\,,$$
$P(X=1) = 1 - P(X=0) = \frac{1}{5}$; pertanto, per $0 \leq x < 1$, si ha: $F(x) = P(X \leq x) = P(X=0) = \frac{4}{5}$. Infine, posto $p_h = P(X=h)$, $h = 0,1$, segue: $\varphi(t) = p_0 + p_1 e^{it} = \frac{4}{5} + \frac{1}{5}\, e^{it}$.

3. Si ha
$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_3^4 x(4-x) dx = \cdots = 2\,;$$
(tale risultato si potrebbe ottenere, senza calcoli, in base a considerazioni di simmetria sul grafico di $f(x)$). Inoltre
$$p = \frac{P(X>2,\, \frac{1}{2} \leq X \leq \frac{7}{2})}{P(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{7}{2})} = \frac{\int_2^{\frac{7}{2}} f(x)dx}{\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{2}} f(x)dx} = \frac{\int_3^{\frac{7}{2}} (4-x)dx}{\int_{\frac{1}{2}}^1 x dx + \int_3^{\frac{7}{2}} (4-x)dx} = \cdots = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{8} + \frac{3}{8}} = \frac{1}{2}\,;$$
(anche il valore di p si potrebbe ottenere, senza calcoli, in base a considerazioni di simmetria sul grafico di $f(x)$).

4. Fissato $y_0 \in (1,2)$, si ha
$$F_2(y_0) = P(Y \leq y_0) = P(0 \leq X \leq 1, 1 \leq Y \leq y_0) = \int_0^1 dx \int_0^{y_0} f(x,y)\, dy =$$
$$= \int_0^1 dx \int_1^{y_0} (y-x)\, dy = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} - xy\right]_0^{y_0} dx = \int_0^1 \left(\frac{y_0^2}{2} - xy_0\right) dx = \left[\frac{xy_0^2}{2} - \frac{x^2 y_0}{2}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{y_0^2 - y_0}{2} = \frac{1}{2} \implies \cdots \implies y_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,.$$

Inoltre

$$p = P(X{+}Y > 2) = \int_0^1 dx \int_{2-x}^2 (y{-}x)\, dy = \cdots = \int_0^1 \left(-\frac{3}{2}\,x^2 + 2x\right) dx = \cdots = -\frac{1}{2}{+}1 = \frac{1}{2}\,.$$

5. Si ha $Cov(4X, -3Y) = -12Cov(X,Y) = -12[\mathbb{P}(XY) - \mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y)]$, con

$$\mathbb{P}(X) = \int_0^1 \int_1^2 xf(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_1^2 x(y-x)dxdy = \cdots = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}\,x - x^2\right) dx = \frac{5}{12}\,;$$

$$\mathbb{P}(Y) = \int_0^1 \int_1^2 yf(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_1^2 y(y-x)dxdy = \cdots = \int_0^1 \left(-\frac{3}{2}\,x + \frac{7}{3}\right) dx = \frac{19}{12}\,;$$

$$\mathbb{P}(XY) = \int_0^1 \int_1^2 xyf(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_1^2 xy(y{-}x)dxdy = \cdots = \int_0^1 \left(-\frac{3}{2}\,x^2 + \frac{7}{3}x\right) dx = \frac{2}{3}\,;$$

pertanto: $Cov(4X, -3Y) = -12\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{12} \cdot \frac{19}{12}\right) = -\frac{1}{12}$.

6. Si ha

$$f_1(x) = \int_0^{+\infty} f(x,y)dy = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x-2y} dy = \frac{1}{2}\,x^2 e^{-x} \int_0^{+\infty} 2e^{-2y} dy = \frac{1}{2}\,x^2 e^{-x}\,,\ x \geq 0\,;$$

inoltre

$$S_1(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{2}\,t^2 e^{-t} dt = \left[-\frac{1}{2}\,t^2 e^{-t}\right]_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty} te^{-t} dt = \frac{1}{2}\,x^2 e^{-x} + [-te^{-t}]_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty} e^{-t} dt =$$

$= \frac{1}{2}\,x^2 e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} = (\frac{1}{2}\,x^2 + x + 1)e^{-x}$. Pertanto

$$h_1(x) = \frac{f_1(x)}{S_1(x)} = \frac{\frac{1}{2}\,x^2 e^{-x}}{(\frac{1}{2}\,x^2 + x + 1)e^{-x}} = \frac{x^2}{x^2 + 2x + 2}\,.$$

7. Si ha $\Theta \mid \mathbf{x} \sim N_{m_4,\sigma_4}$, con $m_4 = 0$ in quanto $\overline{x} = m_0 = 0$. Inoltre

$$\frac{1}{\sigma_4^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{4}{\sigma^2} = \frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4}\,,$$

e quindi $\sigma_4 = \frac{2}{\sqrt{17}}$. Pertanto $\Theta \mid \mathbf{x} \sim N_{0,\frac{2}{\sqrt{17}}}$. Allora

$$P(-2\theta_0 \leq \Theta \leq 2\theta_0 \mid \mathbf{x}) = \Phi_{0,\frac{2}{\sqrt{17}}}(2\theta_0) - \Phi_{0,\frac{2}{\sqrt{17}}}(-2\theta_0) = \Phi\left(2\,\frac{\theta_0}{\frac{2}{\sqrt{17}}}\right) - \Phi\left(-2\,\frac{\theta_0}{\frac{2}{\sqrt{17}}}\right) =$$

$$= 2\Phi\left(2\,\frac{\theta_0}{\frac{2}{\sqrt{17}}}\right) - 1 = 2\Phi(2) - 1 \iff 2\,\frac{\theta_0}{\frac{2}{\sqrt{17}}} = 2 \iff \theta_0 = \frac{2}{\sqrt{17}} = \sigma_4\,.$$