Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Latina* - 9/04/2010)
(il punteggio massimo si ottiene risolvendo correttamente 5 esercizi)

1. Da un'urna U, contenente 2 palline bianche e 1 nera, si prelevano a caso 2 palline che vengono inserite in un'urna V, contenente inizialmente 1 pallina nera; successivamente, da V si estraggono in blocco 2 palline. Sia X il numero aleatorio di palline bianche estratte da U e inserite in V; inoltre, sia Y il numero aleatorio di palline bianche estratte da V. Calcolare la covarianza di X, Y. (*nota: si ponga* $p_{xy} = P(X = x, Y = y)$).

   $$Cov(X, Y) =$$

2. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione caratteristica del numero aleatorio $Z = X + Y$.

   $$\varphi_Z(t) =$$

3. Il rendimento finanziario, in un'opportuna unità di misura, ottenuto in due investimenti economici è rappresentato da un vettore aleatorio (X, Y), con densità congiunta $f(x, y) = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{(x-3)^2}{2} - \frac{(y-6)^2}{8}}$, con $(x, y) \in \mathcal{R}^2$. Calcolare la previsione m_Z e lo scarto standard σ_Z del rendimento aleatorio totale $Z = X + Y$.

   $m_Z =$ $\sigma_Z =$

4. Un oggetto è stato smarrito in una regione rappresentata dal parallelogramma D di vertici $(2, 0), (2, 2), (0, 3), (0, 1)$. Assumendo una distribuzione uniforme per la posizione aleatoria (X, Y) dell'oggetto, calcolare la probabilità α dell'evento condizionato $(X > 1)|(Y > 2)$.

   $$\alpha =$$

5. Un operatore preleva a caso 3 componenti da un lotto L contenente 4 pezzi buoni e 1 difettoso. L'operatore utilizza in periodi successivi tali componenti, scegliendo ogni volta a caso un componente e rimettendolo insieme agli altri due al termine dell'operazione. Definiti gli eventi H = *"il componente difettoso è presente fra i 3 componenti prelevati da L"*, E_i = *"l'i-mo pezzo scelto a caso dall'operatore è buono"*, $i = 1, 2, 3$, calcolare $\gamma = P(H|E_1E_2)$ e $p = P(E_3|E_1E_2)$.

   $\gamma =$ $p =$

6. Un sistema S è composto da 2 dispositivi in serie, con tempi di funzionamento aleatorio X e Y, rispettivamente. Assumendo X, Y indipendenti e con distribuzione esponenziale, con $\lambda_X = 1$, $\lambda_Y = 2$, calcolare, per ogni $z > 0$, la funzione di rischio $h_Z(z)$ del tempo di funzionamento aleatorio Z di S.

   $$h_Z(z) =$$

7. Un sistema S utilizza in modo parallelo n dispositivi simili, che funzionano uno per volta. I tempi aleatori di funzionamento dei dispositivi, $X_1, \ldots, X_n$, sono ugualmente distribuiti e indipendenti, subordinatamente a ciascun valore θ di un parametro aleatorio Θ, la cui distribuzione iniziale è $\beta(\theta) = \theta e^{-\theta}$, per $\theta \geq 0$, con $\beta(\theta) = 0$ altrove. Assumendo che, per ogni fissato θ, la densità di $X_i|\theta$ sia $f(x_i|\theta) = \theta e^{-\theta x_i}$, per $x_i \geq 0$, con $f(x_i|\theta) = 0$ altrove, calcolare la densità finale di Θ, supposto che S abbia funzionato per un tempo totale $x_1 + \cdots + x_n = t$, dove $(x_1, \cdots, x_n)$ è il vettore delle osservazioni per gli n dispositivi.

   $$\beta(\theta|x_1, \cdots, x_n) =$$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 9/04/2010.

1. Si ha

$$X \in \{1,2\}\,,\ Y \in \{0,1,2\}\,,\ (X,Y) \in \{(1,0),(1,1),(2,1),(2,2)\}\,,\ XY \in \{0,1,2,4\}\,,$$

con $P(X=1) = \frac{2}{3}\,,\ P(X=2) = \frac{1}{3}$, e con

$$P(Y=0|X=1) = \frac{1}{3}\,,\ P(Y=1|X=1) = \frac{2}{3}\,,\ P(Y=1|X=2) = \frac{2}{3}\,,\ P(Y=2|X=2) = \frac{1}{3}\,;$$

$$p_{10} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{9}\,,\quad p_{11} = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{9}\,,\quad p_{21} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{9}\,,\quad p_{22} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}\,;$$

$$P(Y=0) = p_{10} = \frac{2}{9}\,,\ P(Y=1) = p_{11}+p_{21} = \frac{6}{9}\,,\ P(Y=2) = p_{22} = \frac{1}{9}\,;$$

$$P(XY=0) = p_{10} = \frac{2}{9}\,,\ P(XY=1) = p_{11} = \frac{4}{9}\,,\ P(XY=2) = p_{21} = \frac{2}{9}\,,\ P(XY=4) = p_{22} = \frac{1}{9}\,;$$

pertanto

$$I\!\!P(X) = 1\cdot\frac{2}{3}+2\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{3}\,,\ I\!\!P(Y) = 0\cdot\frac{2}{9}+1\cdot\frac{6}{9}+2\cdot\frac{1}{9} = \frac{8}{9}\,,\ I\!\!P(XY) = 0\cdot\frac{2}{9}+1\cdot\frac{4}{9}+2\cdot\frac{2}{9}+4\cdot\frac{1}{9} = \frac{4}{3}\,;$$

quindi: $Cov(X,Y) = I\!\!P(XY) - I\!\!P(X)I\!\!P(Y) = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}\cdot\frac{8}{9} = \frac{4}{27}$.

2. Si ha $Z \in \{1,2,3,4\}$, con

$$P(Z=1) = p_{10} = \frac{2}{9}\,,\ P(Z=2) = p_{11} = \frac{4}{9}\,,\ P(Z=3) = p_{21} = \frac{2}{9}\,,\ P(Z=4) = p_{22} = \frac{1}{9}\,;$$

pertanto, posto $P(Z=h) = p_h$, si ha:

$$\varphi_Z(t) = \mathbb{P}(e^{itZ}) = \sum_1^4 p_h e^{ith} = \frac{2e^{it}+4e^{2it}+2e^{3it}+e^{4it}}{9}\,.$$

3. Osservando che

$$\frac{1}{4\pi}e^{-\frac{(x-3)^2}{2}-\frac{(y-6)^2}{8}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-3)^2}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(y-6)^2}{8}} = N_{3,1}(x)N_{6,2}(y)\,,$$

si ha

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = N_{3,1}(x)\int_{-\infty}^{+\infty} N_{6,2}(y)dy = N_{3,1}(x)\,,$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = N_{6,2}(y)\int_{-\infty}^{+\infty} N_{3,1}(x)dx = N_{6,2}(y)\,;$$

pertanto

$$m_X = 3\,,\ \sigma_X = 1\,,\ \ m_Y = 6\,,\ \sigma_Y = 2\,,\ \ f(x,y) = f_1(x)f_2(y)\,,\ Cov(X,Y) = 0\,,$$

da cui segue: $m_Z = m_X + m_Y = 9\,;\ \sigma_Z = \sqrt{\sigma_X^2+\sigma_Y^2} = \sqrt{5}$.

4. L'area del parallelogramma (in un'opportuna unità di misura) è pari a 4, pertanto $f(x,y) = \frac{1}{4}$, per $(x,y) \in D$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Inoltre, osserviamo che: (i) risulta $Y > 2$ se e solo se (X,Y) appartiene al triangolo T di vertici $(2,2),(0,3),(0,2)$, di area $\mu(T) = 1$; (ii) risulta $(X > 1, Y > 2)$ se e solo se (X,Y) appartiene al triangolo Δ di vertici $(2,2),(1,\frac{5}{2}),(1,2)$, di area $\mu(\Delta) = \frac{1}{4}$. Allora

$$\alpha = P[(X > 1)|(Y > 2)] = \frac{P(X > 1, Y > 2)}{P(Y > 2)},$$

con

$$P(X > 1, Y > 2) = \int\int_{\Delta} f(x,y)dxdy = \frac{\mu(\Delta)}{\mu(D)} = \frac{1}{16}, \; P(Y > 2) = \int\int_{T} f(x,y)dxdy = \frac{\mu(T)}{\mu(D)} = \frac{1}{4};$$

pertanto: $\alpha = \frac{\mu(\Delta)}{\mu(T)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$.

5. Si ha

$$P(H) = \frac{\binom{4}{2}\binom{1}{1}}{\binom{5}{3}} = \frac{3}{5}, \; P(E_1E_2|H) = P(E_1|H)P(E_2|H) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{9}, \; P(E_1E_2|H^c) = 1;$$

$$\gamma = \frac{P(H)P(E_1E_2|H)}{P(H)P(E_1E_2|H) + P(H^c)P(E_1E_2|H^c)} = \frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{9}}{\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{9} + \frac{2}{5}\cdot 1} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{10}{15}} = \frac{2}{5};$$

$$P(E_1E_2E_3) = P(H)P(E_1E_2E_3|H) + P(H^c)P(E_1E_2E_3|H^c) = \frac{3}{5}\cdot\frac{8}{27} + \frac{2}{5}\cdot 1 = \frac{26}{45};$$

$$p = P(E_3|E_1E_2) = \frac{P(E_1E_2E_3)}{P(E_1E_2)} = \frac{\frac{26}{45}}{\frac{10}{15}} = \frac{13}{15}.$$

6. Si ha $Z = \min\{X,Y\}$, $\quad h_Z(z) = \frac{f_Z(z)}{S_Z(z)}$, con

$$S_Z(z) = P(Z > z) = P(X > z, Y > z) = P(X > z)P(Y > z) = e^{-z}e^{-2z} = e^{-3z},$$

$$f_Z(z) = -S'_Z(z) = 3e^{-3z}, \; z \geq 0;$$

pertanto Z ha una distribuzione esponenziale di parametro $\lambda_Z = 3 = h_Z(z)\,, \forall\, z > 0$.

7. Si ha

$$\beta(\theta|x_1,\cdots,x_n) = k(x_1,\cdots,x_n)\beta(\theta)\alpha(x_1,\cdots,x_n\,|\,\theta),$$

con

$$\alpha(x_1,\cdots,x_n\,|\,\theta) = f(x_1|\theta)\cdots f(x_n|\theta) = \theta e^{-\theta x_1}\cdots\theta e^{-\theta x_n} = \theta^n e^{-\theta t};$$

pertanto

$$\beta(\theta|x_1,\cdots,x_n) = k(x_1,\cdots,x_n)\theta e^{-\theta}\theta^n e^{-\theta t} = k(x_1,\cdots,x_n)\theta^{n+1}e^{-(t+1)\theta} = G_{c,\lambda}(\theta),$$

con

$$c = n+2, \quad \lambda = t+1, \quad k(x_1,\cdots,x_n) = \frac{\lambda^c}{\Gamma(c)} = \frac{(t+1)^{n+2}}{(n+1)!}.$$