

Probabilità e Statistica (29/01/2011)

(Ing. Civile - Trasporti, Roma; esame da 4 crediti: esercizi 1,2,3,4)

(esame da 6 crediti: il punteggio massimo si ottiene risolvendo correttamente 5 esercizi)

1. Dati due numeri aleatori X e Y , stocasticamente indipendenti e con distribuzione geometrica di parametro $p = \frac{1}{3}$, sia $Z = X + Y$. Calcolare la covarianza di X, Z e la probabilità condizionata $p = P(X > 1 | Z \leq 3)$.

$$\text{Cov}(X, Z) = \qquad p =$$

2. Per andare in una località Tizio deve prendere due autobus, impiegando un tempo aleatorio (in ore) X sul primo e un tempo aleatorio Y sul secondo. La densità congiunta del vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = kxy$, per $(x, y) \in Q = [1, 2] \times [1, 2]$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante k , la previsione μ e lo scarto standard σ del tempo aleatorio totale $Z = X + Y$.

$$k = \qquad \mu = \qquad \sigma =$$

3. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare $\text{Cov}(2X + Y, X - 2Y)$ e la probabilità condizionata $p = P(Y \geq X | X + Y \leq 3)$.

$$\text{Cov}(2X + Y, X - 2Y) = \qquad p =$$

4. Da un lotto contenente 4 pezzi (2 difettosi e 2 buoni) si eliminano a caso due pezzi; successivamente viene prelevato a caso un terzo pezzo. Definiti gli eventi $A =$ "il primo pezzo eliminato dal lotto è buono", $B =$ "il secondo pezzo eliminato dal lotto è buono", $C =$ "il terzo pezzo prelevato dal lotto è buono", calcolare la probabilità p dell'evento $A^c B^c C$ e la probabilità condizionata $\alpha = P(A \vee B | C)$.

$$p = \qquad \alpha =$$

5. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione caratteristica del numero aleatorio $X = |A| + |B|$.

$$\varphi_X(t) =$$

6. La densità congiunta di un vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = ke^{-x-3y}$, per $x \geq 0, 0 \leq y \leq 2x$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante k e, per ogni $z > 0$, la funzione di rischio $h(z)$ del numero aleatorio $Z = 2X - Y$.

$$k = \qquad h(z) =$$

7. La distribuzione iniziale $\beta(\theta)$ di un parametro aleatorio Θ è di tipo Gamma, con parametri $c_0 = 3, \lambda_0 = 1$. Le componenti di un campione casuale $X = (X_1, \dots, X_6)$, subordinatamente a ogni fissato valore θ , hanno una distribuzione Gamma di parametri $c = 2, \lambda = \theta$. Calcolare la previsione di Θ condizionata ad un campione osservato $x = (x_1, \dots, x_6)$, con $x_1 + \dots + x_6 = \tau$.

$$P(\Theta | x) =$$

1. Si ha $Cov(X, Z) = Cov(X, X + Y) = Cov(X, X) + Cov(X, Y) = Var(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{9}} = 6$.

Inoltre

$$(X+Y \leq 3) \iff (X, Y) \in \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}, \quad (X > 1, X+Y \leq 3) \iff (X, Y) = (2, 1);$$

pertanto, $P(X = x, Y = y) = p(x, y)$ e tenendo conto che

$$P(X = x, Y = y) = p(x, y) = P(X = x)P(Y = y) = pq^{x-1}pq^{y-1} = p^2q^{x+y-2} = \frac{1}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^{x+y-2},$$

si ha

$$p = P(X > 1 | Z \leq 3) = \frac{P(X > 1, Z \leq 3)}{P(Z \leq 3)} = \frac{p(2, 1)}{p(1, 1) + p(1, 2) + p(2, 1)} = \frac{\frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{2}{7}.$$

2. Dev'essere $\int \int_Q f(x, y) dx dy = 1$, ovvero $k \int_1^2 \int_1^2 xy dx dy = k \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_1^2 = \frac{9}{4} \cdot k = 1$, da cui segue: $k = \frac{4}{9}$. Inoltre

$$f_1(x) = \int_1^2 \frac{4}{9} xy dy = \frac{2}{3} \cdot x, \quad 1 \leq x \leq 2; \quad f_2(y) = \int_1^2 \frac{4}{9} xy dx = \frac{2}{3} \cdot y, \quad 1 \leq y \leq 2;$$

con $f_1(x) = 0$ per $x \notin [1, 2]$, $f_2(y) = 0$ per $y \notin [1, 2]$. Allora

$$\mathbb{P}(X) = \int_1^2 x f_1(x) dx = \int_1^2 \frac{2}{3} \cdot x^2 dx = \frac{14}{9} = \mathbb{P}(Y),$$

$$\mathbb{P}(X^2) = \int_1^2 x^2 f_1(x) dx = \int_1^2 \frac{2}{3} \cdot x^3 dx = \frac{5}{2} = \mathbb{P}(Y^2),$$

da cui segue: $Var(X) = Var(Y) = \frac{5}{2} - \left(\frac{14}{9}\right)^2 = \frac{13}{162}$. Pertanto: $\mu = \mathbb{P}(Z) = \mathbb{P}(X) + \mathbb{P}(Y) = \frac{28}{9}$; infine, osservando che X e Y sono stocasticamente indipendenti, si ha: $Var(Z) = Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) = \frac{13}{81}$, da cui segue: $\sigma = \frac{\sqrt{13}}{9}$.

3. Essendo $Cov(X, Y) = Cov(Y, X) = 0$, si ha

$$Cov(2X + Y, X - 2Y) = \dots = 2Cov(X, X) - 2Cov(Y, Y) = 2Var(X) - 2Var(Y) = 0.$$

Inoltre, indicando con T il triangolo di vertici $(1, 1), (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}), (1, 2)$ e con D il triangolo di vertici $(1, 1), (2, 1), (1, 2)$, si ha

$$(Y \geq X, X + Y \leq 3) = [(X, Y) \in T], \quad (X + Y \leq 3) = [(X, Y) \in D];$$

da cui segue

$$P(Y \geq X, X + Y \leq 3) = \int \int_T f(x, y) dx dy = \int_1^{\frac{3}{2}} dx \int_x^{3-x} \frac{4}{9} xy dy = \dots = \frac{7}{36},$$

$$P(X + Y \leq 3) = \int \int_D f(x, y) dx dy = \int_1^2 dx \int_1^{3-x} \frac{4}{9} xy dy = \dots = \frac{7}{18};$$

pertanto: $p = \frac{P(Y \geq X, X+Y \leq 3)}{P(X+Y \leq 3)} = \frac{1}{2}$.

4. Si ha

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}, \quad P(A^c B^c C) = P(A^c)P(B^c|A^c)P(C|A^c B^c) = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{6};$$

inoltre

$$P(A \vee B | C) = 1 - P(A^c B^c | C) = 1 - \frac{P(A^c B^c C)}{P(C)} = 1 - \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

5. Si ha $X \sim H(4, 2, \frac{1}{2})$, con

$$X \in \{0, 1, 2\}, \quad P(X = 0) = P(A^c B^c) = \frac{1}{6} = P(AB) = P(X = 2), \quad P(X = 1) = \frac{4}{6};$$

pertanto, posto $P(X = h) = p_h$, $h = 0, 1, 2$, si ha

$$\varphi_X(t) = \sum_{h=0}^2 p_h e^{ith} = \frac{1}{6}(1 + 4e^{it} + e^{2it}).$$

6. Si ha

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{2x} f(x, y) dx dy = \frac{k}{3} \int_0^{+\infty} (e^{-x} \int_0^{2x} 3e^{-3y} dy) dx = \frac{k}{3} \int_0^{+\infty} e^{-x}(1 - e^{-6x}) dx = \dots = \frac{2}{7} k = 1;$$

pertanto $k = \frac{7}{2}$. Inoltre, si ha $Z \in [0, +\infty)$ e, per ogni fissato $z > 0$, risulta

$$\begin{aligned} S(z) &= P(Z > z) = P(Y < 2X - z) = \int_{\frac{z}{2}}^{+\infty} dx \int_0^{2x} \frac{7}{2} e^{-x-3y} dy = \frac{7}{6} \int_{\frac{z}{2}}^{+\infty} e^{-x} dx \int_0^{2x} 3e^{-3y} dy = \\ &= \frac{7}{6} \int_{\frac{z}{2}}^{+\infty} e^{-x}(1 - e^{-6x+3z}) dx = \frac{7}{6} \int_{\frac{z}{2}}^{+\infty} e^{-x} dx - \frac{1}{6} e^{3z} \int_{\frac{z}{2}}^{+\infty} 7e^{-7x} dx = \dots = \frac{7}{6} e^{-\frac{z}{2}} - \frac{1}{6} e^{-\frac{z}{2}} = e^{-\frac{1}{2}z}. \end{aligned}$$

Pertanto, per ogni $z > 0$, si ha: $h(z) = \frac{-S'(z)}{S(z)} = \frac{\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}z}}{e^{-\frac{1}{2}z}} = \frac{1}{2}$ (ovvero, Z ha una distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = \frac{1}{2}$).

7. Ricordando che $G_{c,\lambda}(x) = \frac{\lambda^c}{\Gamma(c)} x^{c-1} e^{-\lambda x}$ per $x \geq 0$, con $G_{c,\lambda}(x) = 0$ altrove, si ha

$$X_i | \theta \sim f(x_i | \theta) = G_{2,\theta}(x_i) = \frac{\theta^2}{\Gamma(2)} x_i^{2-1} e^{-\theta x_i} = \theta^2 x_i e^{-\theta x_i}, \quad i = 1, \dots, 6,$$

da cui segue

$$\alpha(x|\theta) = f(x_1|\theta) \dots f(x_6|\theta) = \theta^{12} x_1 \dots x_6 e^{-\theta \sum_i x_i} = k \theta^{12} e^{-\tau \theta}, \quad k = x_1 \dots x_6;$$

inoltre $\beta(\theta) = G_{c_0, \lambda_0}(\theta) = G_{3,1}(\theta) = \frac{1}{2} \theta^2 e^{-\theta}$ per $\theta \geq 0$, con $\beta(\theta) = 0$ altrove. Allora, la distribuzione finale è ancora di tipo Gamma e risulta

$$\beta(\theta|x) = k(x) \beta(\theta) \alpha(x|\theta) = k_1(x) \theta^2 e^{-\theta} \theta^{12} e^{-\tau \theta} = k_1(x) \theta^{14} e^{-(\tau+1)\theta} = G_{c_6, \lambda_6}(\theta) = G_{15, \tau+1}(\theta),$$

con $k_1(x) = \frac{\lambda_6^{c_6}}{\Gamma(c_6)} = \frac{(\tau+1)^{15}}{14!}$; pertanto: $\mathbb{P}(\Theta | x) = \frac{c_6}{\lambda_6} = \frac{15}{\tau+1}$.