Probabilità e Statistica (9/4/2011)

(Ing. Civile - Trasporti - Ambiente e Territorio, Roma; 3 o 4 crediti: esercizi 1,2,3,4)

(6 crediti: risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Dati 3 eventi A, B, C, con $A \wedge (B \vee C) = \emptyset, P(A) = P(B) = P(C) = p, P(B|C) = \frac{1}{2}$, calcolare: (i) i valori coerenti di p; (ii) il valore di p tale che $\alpha = P(A|B^cC^c) = \frac{2}{7}$.

   $p \in$ $\qquad\qquad$ $p =$

2. Dati due numeri aleatori continui X, Y, indipendenti e con distribuzione normale $N_{0,\sigma}$, calcolare la probabilità p dell'evento condizionato $(X \leq \sigma, Y \leq 2\sigma) \mid (X \geq -2\sigma, Y \geq -\sigma)$ e la covarianza della coppia di numeri aleatori $(X + Y, 2X - 2Y)$.

   $p =$ $\qquad\qquad$ $Cov(X + Y, 2X - 2Y) =$

3. Un operatore preleva a caso tre componenti da un lotto che contiene 3 pezzi buoni e 2 difettosi. Successivamente, l'operatore utilizza a caso due dei tre componenti, che risultano non difettosi (evento E). Indicando con H_r l'evento *"fra i tre componenti prelevati a caso dal lotto ce ne sono r difettosi"*, $r = 0, 1, 2$, calcolare $P(E|H_1 \vee H_2)$ e $P(H_0 \mid E)$.

   $P(E|H_1 \vee H_2) =$ $\qquad\qquad$ $P(H_0 \mid E) =$

4. Un numero aleatorio continuo $X \in [-1, 3]$ ha una densità di probabilità $f(x) = k(x + 1)$ per $x \in [-1, 3]$, con $f(x) = 0$ altrove. Calcolare la costante k e il valore x_0 tale che $\int_{-\infty}^{x_0} f(x)dx = \frac{1}{4}$.

   $k =$ $\qquad\qquad$ $x_0 =$

5. Siano dati due lotti: L_1, contenente 2 pezzi buoni e 1 difettoso, ed L_2, contenente 5 pezzi buoni e 1 difettoso. Da ciascuno dei due lotti L_1 ed L_2 si prelevano a caso 2 pezzi formando un lotto L_3 composto da 4 pezzi. Indicando con X il numero aleatorio di pezzi difettosi contenuti in L_3, calcolare la previsione m_X, lo scarto standard σ_X e la funzione caratteristica $\varphi_X(t)$.

   $m_X =$ $\qquad\qquad$ $\sigma_X =$ $\qquad\qquad$ $\varphi_X(t) =$

6. La distribuzione iniziale di un numero aleatorio Θ è normale con parametri $m_0 = 1,\ \sigma_0 = 3$. Le componenti di un campione casuale (X_1, X_2, X_3), subordinatamente ad ogni fissato valore θ di Θ, hanno una distribuzione normale con valor medio θ e scarto standard $\sigma = 1$. Supposto di aver osservato un campione casuale $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, con $x_1 + x_2 + x_3 = 3$, stabilire per quale valore θ_0 risulta $P[(1 - \theta_0 \leq \Theta \leq 1 + \theta_0) \mid \mathbf{x}] = 2\Phi(2) - 1$.

   $\theta_0 =$

7. La densità congiunta di un vettore aleatorio $(X, Y) \in [5, +\infty) \times [0, +\infty)$ è data da

$$f(x, y) = \begin{cases} ke^{-(x+2y)} & \text{per } x \geq 5\,,\ y \geq 0\,; \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

   Calcolare: (i) la costante k; (ii) la funzione di sopravvivenza $S_1(x)$ di X, per $x > 5$; (iii) la funzione di rischio $h_1(x)$ di X, per $x > 5$.

   $k =$ $\qquad\qquad$ $S_1(x) =$ $\qquad\qquad$ $h_1(x) =$

Probabilità e Statistica (Ing. Civile - Trasporti - Ambiente e Territorio, Roma)
Soluzioni della prova scritta del 9/4/2011.

1. Si ha

$$P[A\vee(B\vee C)] = P(A)+P(B\vee C)] = P(A)+P(B)+P(C)-P(BC) = 3p-\frac{1}{2}p = \frac{5}{2}p \le 1\,;$$

pertanto: $p \in [0, \frac{2}{5}]$. Inoltre

$$A \subseteq B^cC^c\,, \quad P(B^cC^c) = 1-P(B\vee C) = 1-P(B)-P(C)+P(BC) = 1-2p+\frac{1}{2}p = 1-\frac{3}{2}p\,;$$

allora

$$\alpha = P(A|B^cC^c) = \frac{P(A)}{P(B^cC^c)} = \frac{p}{1-\frac{3}{2}p} = \frac{2p}{2-3p} = \frac{2}{7} \iff p = \frac{1}{5}\,.$$

2. Si ha:

$$p = P[(X \le \sigma, Y \le 2\sigma) \mid (X \ge -2\sigma, Y \ge -\sigma)] =$$

$$= \frac{P(-2\sigma \le X \le \sigma, -\sigma \le Y \le 2\sigma)}{P(X \ge -2\sigma, Y \ge -\sigma)} = \frac{P(-2\sigma \le X \le \sigma)P(-\sigma \le Y \le 2\sigma)}{P(X \ge -2\sigma)P(Y \ge -\sigma)}\,,$$

con

$$P(X \ge -2\sigma) = 1-\Phi_{0,\sigma}(-2\sigma) = 1-\Phi(-2) = \Phi(2) \simeq 0.9772\,,$$

$$P(Y \ge -\sigma) = 1-\Phi_{0,\sigma}(-\sigma) = 1-\Phi(-1) = \Phi(1) \simeq 0.8413\,,$$

e con

$$P(-2\sigma \le X \le \sigma) = \Phi_{0,\sigma}(\sigma)-\Phi_{0,\sigma}(-2\sigma) = \Phi(1)-\Phi(-2) = \Phi(1)+\Phi(2)-1 \simeq 0.8185\,,$$

$$P(-\sigma \le Y \le 2\sigma) = \Phi_{0,\sigma}(2\sigma)-\Phi_{0,\sigma}(-\sigma) = \Phi(2)-\Phi(-1) = \Phi(2)+\Phi(1)-1 \simeq 0.8185\,.$$

Pertanto: $p \simeq \frac{0.8185^2}{0.9772\times 0.8413} \simeq 0.8149$. Inoltre, osservando che $\Pr(X) = \mathbb{P}(Y) = 0$ e quindi $\mathbb{P}(X+Y) = \mathbb{P}(2X-2Y) = 0$, segue

$$Cov(X+Y, 2X-2Y) = \mathbb{P}[(X+Y)(2X-2Y)]-\mathbb{P}(X+Y)\mathbb{P}(2X-2Y) = \mathbb{P}[(X+Y)(2X-2Y)] =$$

$$= \mathbb{P}(2X^2-2Y^2)] = 2\mathbb{P}(X^2)-2\mathbb{P}(Y^2) = 2\sigma^2-2\sigma^2 = 0.$$

3. Indicando con X il numero aleatorio di pezzi difettosi presenti fra i tre componenti prelevati dal lotto, si ha $X \sim H(5,3,\frac{2}{5})$; allora $P(H_r) = P(X=r), r = 0,1,2$, con

$$P(X=0) = \frac{\binom{3}{3}\binom{2}{0}}{\binom{5}{3}} = \frac{1}{10}\,,\ P(X=1) = \frac{\binom{3}{2}\binom{2}{1}}{\binom{5}{3}} = \frac{6}{10}\,,\ P(X=2) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{2}}{\binom{5}{3}} = \frac{3}{10}\,.$$

Inoltre: $P(E|H_0) = 1\,,\ P(E|H_1) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}\,,\ P(E|H_2) = 0$;
pertanto: $P(E|H_1 \vee H_2) = \frac{P(EH_1 \vee EH_2)}{P(H_1 \vee H_2)} = \frac{P(EH_1)+P(EH_2)}{P(H_1)+P(H_2)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{10}+0\cdot\frac{3}{10}}{\frac{6}{10}+\frac{3}{10}} = \frac{2}{9}$.
Infine: $P(H_0 \mid E) = \frac{P(E \mid H_0)P(H_0)}{\sum_{r=0}^{2} P(E \mid H_r)P(H_r)} = \frac{1\cdot\frac{1}{10}}{1\cdot\frac{1}{10}+\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{10}+0\cdot\frac{3}{10}} = \frac{1}{3}$.

4. Dev'essere $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$; ovvero $\int_{-1}^{3} k(x+1)dx = k\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{3} = 8k = 1$; quindi $k = \frac{1}{8}$. Inoltre, osservando che

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ \int_{-1}^{x} \frac{t+1}{8} dt, & -1 < x < 3 \\ 1, & x \ge 3; \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ \frac{(x+1)^2}{16}, & -1 < x < 3 \\ 1, & x \ge 3 \end{cases} ;$$

dev'essere: $\int_{-\infty}^{x_0} f(x)dx = F(x_0) = \frac{(x_0+1)^2}{16} = \frac{1}{4}$, $-1 < x_0 < 3$, da cui segue: $x_0 = 1$.

5. Indicando con X_i il numero di pezzi difettosi estratti da L_i, $i = 1, 2$, si ha

$$X_1 \sim H(3, 2, \frac{1}{3}), \quad X_2 \sim H(6, 2, \frac{1}{6}), \quad X = X_1 + X_2 \in \{0, 1, 2\},$$

con X_1, X_2 indipendenti. Quindi $m_X = \mathbb{P}(X_1) + \mathbb{P}(X_2) = 2 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{6} = 1$; inoltre

$$\sigma_X^2 = Var(X_1) + Var(X_2) = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}(1 - \frac{2-1}{3-1}) + 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}(1 - \frac{2-1}{6-1}) = \cdots = \frac{5}{18},$$

$$P(X_1 = 0) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}, \ P(X_1 = 1) = \frac{2}{3}, \ \ P(X_2 = 0) = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{3}, \ P(X_2 = 1) = \frac{1}{3},$$

$$P(X = 0) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}, \ P(X = 2) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9},$$

$$P(X = 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 2) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

Pertanto, posto $P(X = h) = p_h$, si ottiene: $\varphi_X(t) = \sum_h p_h e^{ith} = \frac{2}{9} + \frac{5}{9} e^{it} + \frac{2}{9} e^{2it}$.

6. Si ha: $\Theta \mid \mathbf{x} \sim N_{m_3, \sigma_3}$, con $m_3 = m_0 = 1$, in quanto $\overline{x} = m_0 = 1$. Inoltre

$$\frac{1}{\sigma_3^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{3}{\sigma^2} = \frac{1}{9} + 3 = \frac{28}{9},$$

e quindi $\sigma_3 = \frac{3}{2\sqrt{7}}$; pertanto: $\Theta \mid \mathbf{x} \sim N_{1, \frac{3}{2\sqrt{7}}}$. Allora

$$P(1-\theta_0 \le \Theta \le 1+\theta_0 \mid \mathbf{x}) = \Phi_{1,\frac{3}{2\sqrt{7}}}(1+\theta_0) - \Phi_{1,\frac{3}{2\sqrt{7}}}(1-\theta_0) = \Phi\left(\frac{1+\theta_0-1}{\frac{3}{2\sqrt{7}}}\right) - \Phi\left(\frac{1-\theta_0-1}{\frac{3}{2\sqrt{7}}}\right) =$$

$$= 2\Phi\left(\frac{\theta_0}{\frac{3}{2\sqrt{7}}}\right) - 1 = 2\Phi(2) - 1 \iff \Phi\left(\frac{\theta_0}{\frac{3}{2\sqrt{7}}}\right) = \Phi(2),$$

da cui (essendo Φ un funzione crescente) segue: $\theta_0 = 2\sigma_3 = \frac{3}{\sqrt{7}}$.

7. Si ha

$$\int_5^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(x,y)dxdy = k \int_5^{+\infty} e^{-x}dx \int_0^{+\infty} e^{-2y}dy = \frac{k}{2} \int_5^{+\infty} e^{-x}dx = \frac{k}{2} e^{-5} = 1,$$

da cui segue: $k = 2e^5$. Inoltre, per ogni $x \ge 5$, si ha

$$f_1(x) = 2e^5 \int_0^{+\infty} e^{-x-2y}dy = e^5 e^{-x} \int_0^{+\infty} 2e^{-2y}dy = e^5 e^{-x} = e^{-(x-5)},$$

con $f_1(x) = 0$ altrove. Pertanto, per ogni $x > 5$,

$$S_1(x) = \int_x^{+\infty} e^5 e^{-t}dt = e^5 e^{-x} = e^{-(x-5)} = f_1(x); \quad h_1(x) = \frac{f_1(x)}{S_1(x)} = 1.$$