**Probabilità e Statistica** (*Ing. Amb. Terr. - Latina* - 16/4/2011)

*(il punteggio massimo si ottiene risolvendo correttamente 5 esercizi)*

1. Un numero aleatorio continuo $X \in [-3, 1]$ ha una densità di probabilità $f(x) = k(x-1)$ per $x \in [-3, 1]$, con $f(x) = 0$ altrove. Calcolare la costante $k$ e il valore $x_0$ tale che $\int_{-\infty}^{x_0} f(x)dx = \frac{3}{4}$.

   $k =$ $\qquad\qquad$ $x_0 =$

2. Un operatore preleva a caso tre componenti da un lotto che contiene 4 pezzi buoni e 2 difettosi. Successivamente, l'operatore utilizza a caso due dei tre componenti, che risultano non difettosi (evento $E$). Indicando con $H_r$ l'evento *"fra i tre componenti prelevati a caso dal lotto ce ne sono r difettosi"*, $r = 0, 1, 2$, calcolare $P(H_0 \vee H_1 \,|\, H_1 \vee H_2)$ e $P(H_0 \,|\, E)$.

   $P(H_0 \vee H_1 \,|\, H_1 \vee H_2) =$ $\qquad\qquad$ $P(H_0 \,|\, E) =$

3. Dati due numeri aleatori continui $X, Y$, indipendenti e con distribuzione normale $N_{m,1}$, calcolare la probabilità $p$ dell'evento condizionato $(X \leq m+1, Y \leq m+2) \mid (X \geq m-2, Y \geq m-1)$ e la covarianza della coppia di numeri aleatori $(3X - 2Y, 2X + 3Y)$.

   $p =$ $\qquad\qquad$ $Cov(3X - 2Y, 2X + 3Y) =$

4. Dati 4 eventi $A, B, C, D$, con $(A \vee B) \wedge (C \vee D) = \emptyset, P(A) = P(B) = P(C) = P(D) = p, P(B|A) = P(D|C) = \frac{1}{2}$, calcolare: (i) i valori coerenti di $p$; (ii) il valore di $p$ tale che $\alpha = P(A \vee B|C^c D^c) = \frac{2}{3}$.

   $p \in$ $\qquad\qquad$ $p =$

5. Con riferimento all'esercizio precedente, assumendo $p = \frac{1}{6}$, calcolare la previsione $m_X$, lo scarto standard $\sigma_X$ e la funzione caratteristica $\varphi_X(t)$ del numero aleatorio $X = |A \vee B| - |C \vee D|$.

   $m_X =$ $\qquad\qquad$ $\sigma_X =$ $\qquad\qquad$ $\varphi_X(t) =$

6. La distribuzione iniziale di un numero aleatorio $\Theta$ è normale con parametri $m_0 = \sigma_0 = 2$. Le componenti di un campione casuale $(X_1, X_2, X_3, X_4)$, subordinatamente ad ogni fissato valore $\theta$ di $\Theta$, hanno una distribuzione normale con valor medio $\theta$ e scarto standard $\sigma = 1$. Supposto di aver osservato un campione casuale $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, con $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$, stabilire per quale valore $\theta_0$ risulta $P[(2 - \theta_0 \leq \Theta \leq 2 + \theta_0) \mid \mathbf{x}] = 2\Phi(1) - 1$.

   $\theta_0 =$

7. La densità congiunta di un vettore aleatorio $(X, Y) \in [0, +\infty) \times [10, +\infty)$ è data da

$$f(x,y) = \begin{cases} ke^{-(2x+y)} & \text{per } x \geq 0\,,\ y \geq 10\,; \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

   Calcolare: (i) la costante $k$; (ii) la funzione di sopravvivenza $S_2(y)$ di $Y$, per $y > 10$; (iii) la funzione di rischio $h_2(y)$ di $Y$, per $y > 10$.

   $k =$ $\qquad\qquad$ $S_2(y) =$ $\qquad\qquad$ $h_2(y) =$

**Probabilità e Statistica** (Ing. Amb. Terr. - Latina)

*Soluzioni della prova scritta del 16/4/2011.*

1. Dev'essere $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$; ovvero $\int_{-3}^{1} k(x-1)dx = k\left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{-3}^{1} = -8k = 1$; quindi $k = -\frac{1}{8}$. Inoltre, osservando che

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0, & x \le -3 \\ -\frac{1}{8}\int_{-3}^{x}(t-1)dt, & -3 < x < 1 \\ 1, & x \ge 1; \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \le -3 \\ -\frac{(x^2-2x-15)}{16}, & -3 < x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases};$$

dev'essere

$$\int_{-\infty}^{x_0} f(x)dx = F(x_0) = -\frac{(x_0^2 - 2x_0 - 15)}{16} = \frac{3}{4}, \quad -3 < x_0 < 1,$$

da cui segue: $x_0 = -1$.

2. Indicando con $X$ il numero aleatorio di pezzi difettosi presenti fra i tre componenti prelevati dal lotto, si ha $X \sim H(6, 3, \frac{1}{3})$; allora $P(H_r) = P(X = r), r = 0, 1, 2$, con

$$P(X=0) = \frac{\binom{4}{3}\binom{2}{0}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{5}, \; P(X=1) = \frac{\binom{4}{2}\binom{2}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{3}{5}, \; P(X=2) = \frac{\binom{4}{1}\binom{2}{2}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{5}.$$

Quindi: $P(H_0 \vee H_1 \,|\, H_1 \vee H_2) = \frac{P[(H_0 \vee H_1) \wedge (H_1 \vee H_2)]}{P(H_1 \vee H_2)} = \frac{P(H_1)}{P(H_1)+P(H_2)} = \frac{3}{4}$.
Inoltre: $P(E|H_0) = 1$, $P(E|H_1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$, $P(E|H_2) = 0$;
pertanto: $P(H_0 \,|\, E) = \frac{P(E \,|\, H_0)P(H_0)}{\sum_{r=0}^{2} P(E \,|\, H_r)P(H_r)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{5}}{1 \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + 0 \cdot \frac{1}{5}} = \frac{1}{2}$.

3. Si ha:

$$p = P[(X \le m+1, Y \le m+2) \mid (X \ge m-2, Y \ge m-1)] =$$

$$= \frac{P(m-2 \le X \le m+1, m-1 \le Y \le m+2)}{P(X \ge m-2, Y \ge m-1)} = \frac{P(m-2 \le X \le m+1)P(m-1 \le Y \le m+2)}{P(X \ge m-2)P(Y \ge m-1)},$$

con

$$P(X \ge m-2) = 1 - \Phi_{m,1}(m-2) = 1 - \Phi(-2) = \Phi(2) \simeq 0.9772,$$

$$P(Y \ge m-1) = 1 - \Phi_{m,1}(m-1) = 1 - \Phi(-1) = \Phi(1) \simeq 0.8413,$$

e con

$$P(m-2 \le X \le m+1) = \Phi_{m,1}(m+1) - \Phi_{m,1}(m-2) = \Phi(1) - \Phi(-2) = \Phi(1) + \Phi(2) - 1 \simeq 0.8185,$$

$$P(m-1 \le Y \le m+2) = \Phi_{m,1}(m+2) - \Phi_{m,1}(m-1) = \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) + \Phi(1) - 1 \simeq 0.8185.$$

Pertanto: $p \simeq \frac{0.8185^2}{0.9772 \times 0.8413} \simeq 0.8149$. Inoltre, osservando che

$$\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(Y) = m, \; \mathbb{P}(X^2) = \mathbb{P}(Y^2), \; Cov(X,Y) = 0, \; \mathbb{P}(XY) = \mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y) = m^2,$$

segue

$$Cov(3X - 2Y, 2X + 3Y) = \mathbb{P}[(3X - 2Y)(2X + 3Y)] - \mathbb{P}(3X - 2Y)\mathbb{P}(2X + 3Y) =$$

$$= \mathbb{P}(6X^2 - 6Y^2 + 5XY) - (3m - 2m)(2m + 3m) = 5m^2 - 5m^2 = 0.$$

4. Si ha: $P(A \vee B) = P(C \vee D) = p + p - \frac{p}{2} = \frac{3}{2}\,p$; allora

$$P[(A \vee B) \vee (C \vee D)] = P(A \vee B) + P(C \vee D) = 3p \leq 1\,;$$

pertanto: $p \in [0, \frac{1}{3}]$. Inoltre: $A \vee B \subseteq C^c D^c$, ovvero $(A \vee B) \wedge C^c D^c = A \vee B$, con $P(C^c D^c) = 1 - P(C \vee D) = 1 - \frac{3}{2}\,p$; quindi

$$\alpha = P(A \vee B | C^c D^c) = \frac{P(A \vee B)}{P(C^c D^c)} = \frac{\frac{3}{2}\,p}{1 - \frac{3}{2}p} = \frac{3p}{2 - 3p} = \frac{2}{3} \iff p = \frac{1}{6}\,.$$

5. Si ha $X \in \mathcal{C}_X = \{-1, 0, 1\}$, con $P(A) = \cdots = P(D) = \frac{1}{6}$ e con

$$P(X = 1) = P(A \vee B) = \frac{3}{2}\,p = \frac{1}{4} = P(C \vee D) = P(X = -1)\,, \quad P(X = 0) = \frac{1}{2}\,.$$

Allora

$$m_X = \frac{1}{4} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 1 = 0\,,\ Var(X) = \mathbb{P}(X^2) = \frac{1}{4} \cdot (-1)^2 + \frac{1}{2} \cdot 0^2 + \frac{1}{4} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}\,,$$

e quindi: $\sigma_X = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Inoltre, posto $p_k = P(X = x_k)$, $x_k \in \mathcal{C}_X$, segue

$$\varphi_X(t) = \mathbb{P}(e^{itX}) = \sum_{x_k \in \mathcal{C}_X} p_k e^{itx_k} = \frac{e^{-it} + 2 + e^{it}}{4}\,.$$

6. Si ha $\Theta \mid \mathbf{x} \sim N_{m_4, \sigma_4}$, con $m_4 = m_0 = 2$, in quanto $\overline{x} = m_0 = 2$. Inoltre

$$\frac{1}{\sigma_4^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{4}{\sigma^2} = \frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4}\,,$$

e quindi $\sigma_4 = \frac{2}{\sqrt{17}}$; pertanto $\Theta \mid \mathbf{x} \sim N_{2, \frac{2}{\sqrt{17}}}$. Allora

$$P(2 - \theta_0 \leq \Theta \leq 2 + \theta_0 \mid \mathbf{x}) = \Phi_{2, \frac{2}{\sqrt{17}}}(2 + \theta_0) - \Phi_{2, \frac{2}{\sqrt{17}}}(2 - \theta_0) = \Phi\left(\frac{2 + \theta_0 - 2}{\frac{2}{\sqrt{17}}}\right) - \Phi\left(\frac{2 - \theta_0 - 2}{\frac{2}{\sqrt{17}}}\right) =$$

$$= 2\Phi\left(\frac{\theta_0}{\frac{2}{\sqrt{17}}}\right) - 1 = 2\Phi(1) - 1 \iff \Phi\left(\frac{\theta_0}{\frac{2}{\sqrt{17}}}\right) = \Phi(1)\,,$$

da cui (essendo $\Phi$ un funzione crescente) segue: $\theta_0 = \sigma_4 = \frac{2}{\sqrt{17}}$.

7. Si ha

$$\int_0^{+\infty} \int_{10}^{+\infty} f(x, y) dx dy = k \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx \int_{10}^{+\infty} e^{-y} dy = \frac{k}{2}\, e^{-10} \int_0^{+\infty} 2e^{-2x} dx = \frac{k}{2}\, e^{-10} = 1\,,$$

da cui segue: $k = 2e^{10}$. Inoltre, per ogni $y > 10$, si ha

$$f_2(y) = \int_0^{+\infty} 2e^{10} e^{-2x - y} dx = e^{10} e^{-y} \int_0^{+\infty} 2e^{-2x} dx = e^{10} e^{-y} = e^{-(y-10)}\,,$$

con $f_2(y) = 0$ altrove. Pertanto, per ogni $y > 10$, si ha

$$S_2(y) = \int_y^{+\infty} e^{10} e^{-t} dt = e^{10} e^{-y} = e^{-(y-10)} = f_2(y)\,; \quad h_2(y) = \frac{f_2(y)}{S_2(y)} = 1\,.$$