Probabilità e Statistica (*Ing. Amb. Terr. - Latina* - 19/11/2011)

(il punteggio massimo si ottiene risolvendo correttamente 5 esercizi)

1. Da un'urna contenente 1 pallina bianca e 3 nere si effettuano un numero aleatorio X di estrazioni senza restituzione fino all'uscita della pallina bianca. Calcolare la previsione m e la varianza σ^2 di X; inoltre calcolare la probabilità p dell'evento $(m - \sigma < X < m + \sigma)$ (*si osservi che, indicando con E_i l'evento "l'i-ma pallina estratta è quella bianca", si ha:* $E_i = E_1^c \cdots E_{i-1}^c E_i, i = 2, 3, 4$).

   $m =$ $\quad\quad$ $\sigma^2 =$ $\quad\quad$ $p =$

2. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione caratteristica del numero aleatorio X^2.

   $\varphi(t) =$

3. Sia Q il quadrato di vertici i punti $(0, 0), (2, 0), (2, 2), (0, 2)$. La densità congiunta di un vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = kxy$, per $(x, y) \in Q$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante k e il valore y_0 tale che $P(Y > y_0) = 2P(Y \leq y_0)$.

   $k =$ $\quad\quad$ $y_0 =$

4. Una persona, affetta con probabilità p da una certa malattia (ipotesi H), si sottopone per 3 volte ad un'analisi con un'apparecchiatura che ogni volta fornisce con probabilità 0.9 la diagnosi corretta: esito negativo se la persona è sana; esito positivo se la persona è malata. Definiti gli eventi $E_i =$ *"nell'i-mo esame la risposta è positiva"*, $i = 1, 2, 3$, determinare per quali valori di p risulta $P(H \mid E_1 E_2^c E_3) > P(H^c \mid E_1 E_2^c E_3)$.

   $p \in$

5. Un'azienda produce componenti di un certo tipo utilizzando due apparecchiature simili, la prima per un tempo aleatorio X e la seconda per un tempo aleatorio Y. La densità congiunta del vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = 4e^{-2(x+y)}$, per $x \geq 0$, $y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la previsione μ del tempo aleatorio totale di produzione $X + Y$ e la probabilità p dell'evento condizionato $(X + Y \leq 2 \mid X \leq 2)$.

   $\mu =$ $\quad\quad$ $p =$

6. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare per ogni $z \geq 0$ la funzione di sopravvivenza $S(z)$ e la funzione di rischio $h(z)$ del numero aleatorio $Z = X + Y$.

   $S(z) =$ $\quad\quad$ $h(z) =$

7. Dati tre eventi scambiabili E_1, E_2, E_3, con $P(E_1) = P(E_1 E_2) = P(E_1 E_2 E_3) = \frac{1}{2}$, calcolare $P(E_2^c \mid E_3)$, $P(E_1^c E_3^c)$ e $P(E_1^c \mid E_2^c E_3^c)$.

   $P(E_2^c \mid E_3) =$ $\quad\quad$ $P(E_1^c E_3^c) =$ $\quad\quad$ $P(E_1^c \mid E_2^c E_3^c) =$

Probabilità e Statistica (Ing. Amb. Terr. - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 19/11/2011.

1. Si ha

$$P(X=1) = P(E_1) = \frac{1}{4}, \quad P(X=2) = P(E_2) = P(E_1^c E_2) = P(E_1^c)P(E_2|E_1^c) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{4},$$

$$P(X=3) = P(E_3) = P(E_1^c E_2^c E_3) = P(E_1^c)P(E_2^c|E_1^c)P(E_3|E_1^c E_2^c) = \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$P(X=4) = P(E_1^c E_2^c E_3^c E_4) = P(E_1^c E_2^c E_3^c) = P(E_1^c)P(E_2^c|E_1^c)P(E_3^c|E_1^c E_2^c) = \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Allora: $\mathbb{P}(X) = \frac{1+2+3+4}{4} = \frac{5}{2}$, $\mathbb{P}(X^2) = \frac{1^2+2^2+3^2+4^2}{4} = \frac{15}{2}$, $\sigma^2 = \frac{15}{2} - \frac{25}{4} = \frac{5}{4}$; inoltre, osservando che $\sigma = \frac{\sqrt{5}}{2} \simeq 1.118$, si ha: $m - \sigma \simeq 1.382$, $m + \sigma \simeq 3.618$; pertanto

$$p = P(m - \sigma < X < m + \sigma) = P(X=2) + P(X=3) = \frac{1}{2}.$$

(*Nota:* $P(m - 2\sigma < X < m + 2\sigma) = 1$; *mentre, con la disuguaglianza di Cebicev si ha soltanto:* $P(m - 2\sigma < X < m + 2\sigma) \geq \frac{3}{4}$.)

2. Si ha $X^2 \in \{1, 4, 9, 16\}$, con

$$P(X^2 = 1) = P(X=1) = \frac{1}{4}, \quad P(X^2 = 4) = P(X=2) = \frac{1}{4},$$

$$P(X^2 = 9) = P(X=3) = \frac{1}{4}, \quad P(X^2 = 16) = P(X=4) = \frac{1}{4}.$$

Pertanto, posto $P(X^2 = h) = p_h$, $h = 1, 4, 9, 16$, si ha

$$\varphi(t) = \sum_h p_h e^{ith} = \frac{e^{it} + e^{4it} + e^{9it} + e^{16it}}{4}.$$

3. Si ha: $\int\int_Q f(x,y)dxdy = k\int_0^2 xdx \int_0^2 ydy = k\int_0^2 2xdx = 4k = 1$, quindi: $k = \frac{1}{4}$. Inoltre, essendo $P(Y > y_0) + P(Y \leq y_0) = 3P(Y \leq y_0) = 1$, segue

$$P(Y \leq y_0) = \frac{1}{3} = \frac{1}{4}\int_0^2 xdx \int_0^{y_0} ydy = \frac{y_0^2}{16}\int_0^2 2xdx = \frac{y_0^2}{4};$$

ovvero: $y_0^2 = \frac{4}{3}$; pertanto: $y_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

4. Si ha

$$P(E_1 E_2^c E_3 \,|\, H) = P(E_1|H)P(E_2^c|H)P(E_3|H) = 0.9^2 \times 0.1 = \frac{81}{1000},$$

$$P(E_1 E_2^c E_3 \,|\, H^c) = P(E_1|H^c)P(E_2^c|H^c)P(E_3|H^c) = 0.9 \times 0.1^2 = \frac{9}{1000};$$

pertanto: $P(H \,|\, E_1 E_2^c E_3) = \frac{P(E_1 E_2^c E_3 \,|\, H)P(H)}{P(E_1 E_2^c E_3 \,|\, H)P(H) + P(E_1 E_2^c E_3 \,|\, H^c)P(H^c)} =$

$$= \frac{\frac{81}{1000}\cdot p}{\frac{81}{1000}\cdot p + \frac{9}{1000}\cdot(1-p)} = \frac{9p}{8p+1} > P(H^c \,|\, E_1 E_2^c E_3) \iff \frac{9p}{8p+1} > \frac{1}{2} \iff p > 0.1.$$

5. Si ha

$$\mu = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}(x+y)4e^{-2(x+y)}dxdy = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}4xe^{-2(x+y)}dxdy + \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}4ye^{-2(x+y)}dxdy =$$

$$= \int_0^{+\infty}(2xe^{-2x}\int_0^{+\infty}2e^{-2y}dy)dx + \int_0^{+\infty}(2ye^{-2y}\int_0^{+\infty}2e^{-2x}dx)dy =$$

$$= \int_0^{+\infty}2xe^{-2x}dx + \int_0^{+\infty}2ye^{-2y}dy = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1\,.$$

Inoltre $(X+Y\leq 2,\, X\leq 2) = (X+Y\leq 2)$; quindi: $P(X+Y\leq 2\,|\,X\leq 2) = \frac{P(X+Y\leq 2)}{P(X\leq 2)}$, con

$$P(X+Y\leq 2) = \int_0^2(2e^{-2x}\int_0^{2-x}2e^{-2y}dy)dx = \int_0^2 2e^{-2x}(1-e^{-2(2-x)})dx =$$

$$= \int_0^2 2e^{-2x}dx - 2e^{-4}\int_0^2 dx = 1-e^{-4}-4e^{-4} = 1-5e^{-4}\,,$$

$$P(X\leq 2) = \int_0^2(2e^{-2x}\int_0^{+\infty}2e^{-2y}dy)dx = \int_0^2 2e^{-2x}dx = 1-e^{-4}\,.$$

Pertanto: $p = \frac{1-5e^{-4}}{1-e^{-4}} = \frac{e^4-5}{e^4-1} = 1-\frac{4}{e^4-1}$.

6. Si ha: $S(z) = P(Z>z) = P(X+Y>z) = 1-P(X+Y\leq z)$, con

$$P(X+Y\leq z) = \int_0^z(2e^{-2x}\int_0^{z-x}2e^{-2y}dy)dx = \int_0^z 2e^{-2x}(1-e^{-2(z-x)})dx =$$

$$= \int_0^z 2e^{-2x}dx - 2e^{-2z}\int_0^2 dx = 1-e^{-2z}-2ze^{-2z} = 1-(1+2z)e^{-2z}\,;$$

pertanto, per ogni $z\geq 0$, si ha: $S(z) = (1+2z)e^{-2z}$. Inoltre, indicando con $g(z)$ la densità di Z, si ha: $g(z) = -S'(z) = -2e^{-2z}-(1+2z)e^{-2z}(-2) = 4ze^{-2z} = G_{2,2}(z)$. Allora, per ogni $z\geq 0$, segue: $h(z) = \frac{g(z)}{S(z)} = \frac{4ze^{-2z}}{(1+2z)e^{-2z}} = \frac{4z}{1+2z}$.

7. Dall'ipotesi di scambiabilità segue

$$P(E_2^c\,|\,E_3) = \frac{P(E_2^cE_3)}{P(E_3)} = \frac{P(E_3)-P(E_2E_3)}{P(E_3)} = \frac{P(E_1)-P(E_1E_2)}{P(E_1)} = \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 0\,;$$

$$P(E_1^cE_3^c) = 1-P(E_1\vee E_3) = 1-P(E_1)-P(E_3)+P(E_1E_3) = 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,;$$

$$P(E_1^c\,|\,E_2^cE_3^c) = \frac{P(E_1^cE_2^cE_3^c)}{P(E_2^cE_3^c)} = \frac{1-P(E_1\vee E_2\vee E_3)}{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1-3P(E_1)+3P(E_1E_2)-P(E_1E_2E_3)}{\frac{1}{2}} = \frac{1-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1\,.$$

Nota: i valori di probabilità proposti in questo esercizio si presentano, ad esempio, nel caso di estrazioni con restituzione da un'urna di composizione incognita, che contiene solo palline bianche (con probabilità $\frac{1}{2}$), oppure solo palline nere (con probabilità $\frac{1}{2}$).